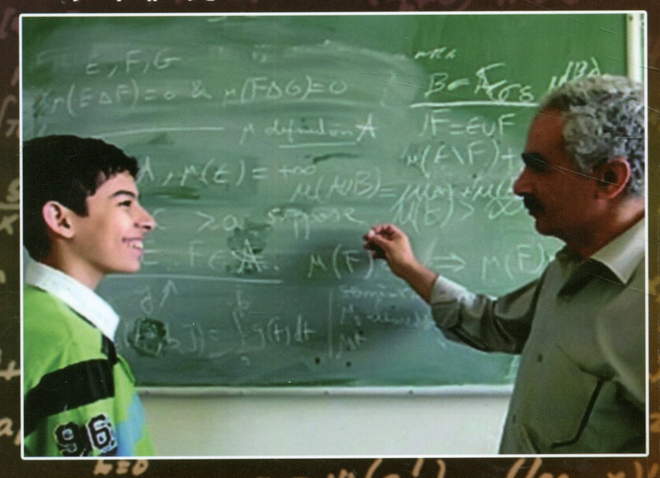
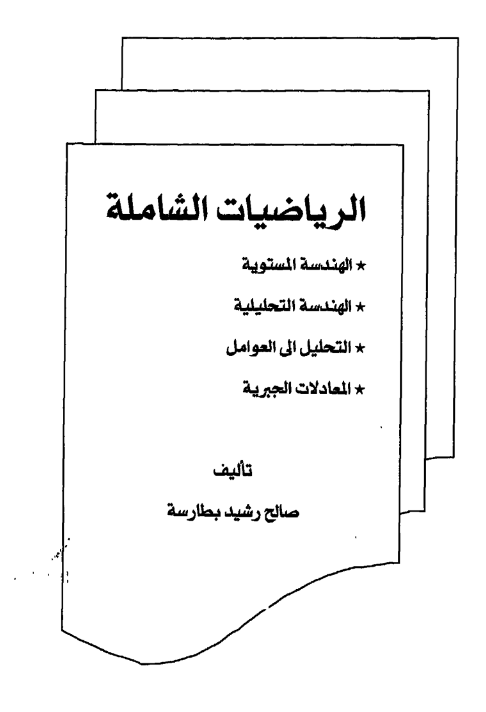
الرياضيات الشاملة

الهندسة المستوية - الهندسة التحليلية
التحليل إلى العوامل - المعادلات الجبرية

صالح رشيد بطارسة



دار أسامة



الرياضيات الشاملة

* الهندسة المستوية
* الهندسة التحليلية
* التحليل الى العوامل
* المعادلات الجبرية

تأليف

صالح رشيد بطارسة

دار أسامة للنشر والتوزيع

الأردن – عمان

الناشر

دار أسامة للنشر و التوزيع

الأردن – عمان

- هاتف : 5658252– 5658253
- فاكس : 5658254
- العنوان : العبدلي- مقابل البنك العربي

ص. ب : 141781

Email: darosama@orange.jo

www.darosama.net

حقوق الطبع محفوظة

الطبعة الأولى

2014م

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية

(2013/6/2214)

510

بطارسة، صالح رشيد

الرياضيات الشاملة/صالح رشيد بطارسة.- عمان: دار أسامة للنشر والتوزيع ، 2013.

( ) ص.

ر.أ :(2013/6/2214).

الواصفات: الرياضيات/

ISBN: 978-9957-22-385-4

الفهرس

المقدمة

بعد الاتكال على الله،،،

قمت بتأليف وإعداد هذه السلسلة من الرياضيات تحت عنوان "الرياضيات الشاملة". بمضمون كامل وعلم وافر وأسلوب نادر، نعم إنه أسلوب علمي بسيط يخلو من الحشو والغموض والتعقيد، كونه يعتمد على الاكثار من الأمثلة والتمارين لتوضيح المصطلحات والمفاهيم دون تكرار منفّر للدارسات والدارسين وبلا إيجاز مُدّمر للنظريات والقوانين.

من المعلوم أن الرياضيات قديمة قدم الزمان وهبها الله للإنسان منذ أن خلق أبانا آدم وأمنا حواء. ولكن الآن ما عادت الرياضيات كما كانت عليه من أزمان مجرد مجموعة من الرموز والاشارات والأعداد..

ومع أنها كذلك إلاّ أنها أصبحت بالإضافة الى ذلك ضرورة من ضرورات الحياة كالهواء والماء والغذاء.. التي يحتاجها الانسان للقضاء على الجهل والفقر والمرض... تلك الآفات التي لا تتعايش إلا مع من تخلّف من البشر،

لذا لا بُدَّ من القول إن:

الرياضيات جسرٌ للعبور الى عصر التكنولوجيا والعلوم الزاخر بالاختراعات والابتكارات والفنون، والتي نحن بحاجة ماسة اليها جميعاً لتسيير عجلة الحياة بكل يُسر وبلا معاناة.

الرياضيات إن كنت لا تعلم هي بالذات معشوقة الجماهير المحبة للعلم، والقادرة على التفكير، ولكن لا يجرؤ على عشقها من البشر إلا من كان قوي الإرادة سريع البديهة سليم العقل والجسم معاً. وصدق من قال في هذا المضمار "العقل السليم في الجسم السليم". وأصدق منه من يقول: "الرأس بلا تفكير كالإناء المشروخ، كلاهما يستحق التكسير".

- الرياضيات إن كنت لا تدري تُنمي الذكاء وتُشذّب الأخلاق وتسمو بالإنسان الى العلاء، كيف لا؟ وجميع رواد الفضاء من العلماء والرياضيين (علماء الرياضيات).

- الرياضيات لا تحتاج من دارسها الكثير من الجهد والعناء، بل يجب عليه الإلمام البسيط بالقوانين والنظريات، ولكن ليس كالببغاوات بالحفظ دون الفهم! وإنما تحتاج الى التدريب الكتابي الكافي، وباستمرار مع الدقة والإتقان والسرعة قدر الإمكان.

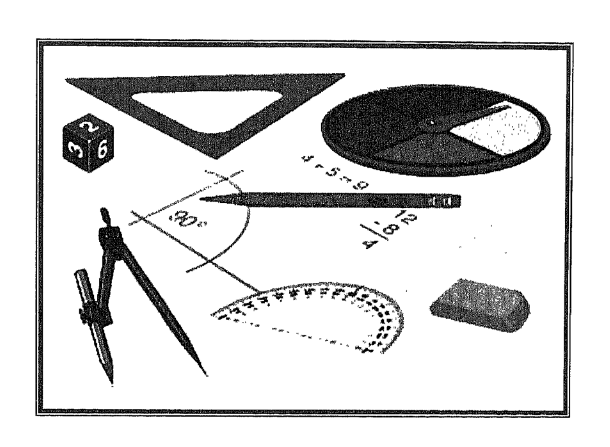
- فيادارس الرياضيات عليك استخدام "الورقة والقلم" أفضل وسيلة لدراسة العلوم قاطبة، ، ، لتصبح بعد مدة من الزمن من علماء الرياضيات البارزين.. ونؤكد ونختم على ذلك بقولنا آمين!...

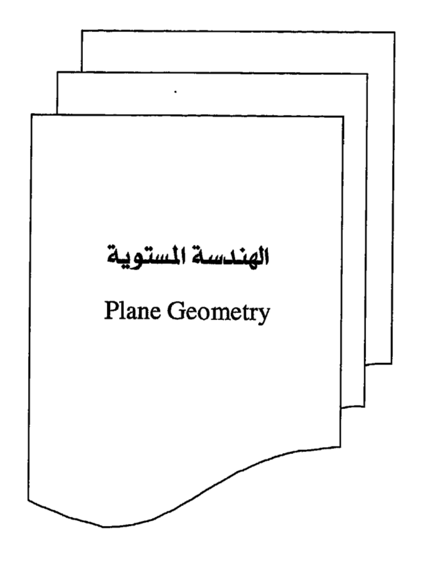
تنويه

في هذا السياق لا بد لي من أن أنبه الى هذه الملحوظة منذ البداية فأقول:

بما أننا نعيش عصر العلم والتكنولوجيا، وجب علينا استخدام الحواسيب والآلات الحاسبة لتسهيل اجراء العمليات الرياضيات، واستخراج نتائجها بكل دقة واتقان، وبالسرعة التي يتصف بها هذا الزمان".

المؤلف





الهندسة المستوية

Plane Geometry

(٣- ١) الهندسة المستوية Plane Geometry:

وتنسب الهندسة المستوية أو الاقليدية إلى مبتكرها وواضع مفاهيمها ومسلماتها ونظرياتها، اقليدس الاسكندري (٣٢٥ – ٢٦٥) ق. م.

من المعلوم أن البناء الهندسي للرياضيات قد تشيد على أسس متينة متناسقة منطقياً ومرتبة تراكمياً، تبدأ بالمسميات فالمسلمات وتنتهي بالنظريات، إذ يُجسد هذا البناء مضمون الهندسات بأنوعها وما يحويه هذا المضمون من مصطلحات ومفاهيم متمثلة بالعديد من القواعد والقوانين.

ولنبدأ بمناقشة وتفسير محتويات ومضامين الهندسة المستوية من خلال هذه السطور:

× **المسميات Notions:**

وهي الأوليات كونها الأساس المتين الذي ترتكز عليه الهندسة المستوية وجميع الهندسات الأخرى، لذا سنناقشها بشيء من التفصيل ولكن دون اسهاب أو تطويل كما يلي:

" **النقطة Point**":

النقطة بشكل عام تتمثل بذرة من الغبار عالقة في الهواء، أو سفينة من اسطول راسية على شاطئ المحيط أو حبة ملح الطعام المستخدم في الغذاء.

أما النقطة في الرياضيات فهي مجسم فاقد الأبعاد، إذ لا طول له ولا عرض ولا ارتفاع، ويمكن أن تكون النقطة هي الأثر الذي يتركه القلم عند ملامسته لسطح قطعة من الورق ويرمز لها بالرمز (٠) وكأنه العدد الحقيقي صفر في حقل الأعداد الحقيقية.

هذا وتسمى النقطة بحرف واحد من حروف الهجاء، كأن تكون النقطة أ أو النقطة ب وهكذا. ومجموعة النقط المنتشرة هنا وهناك بلا ترتيب ولا انتظام تشكل ما يسمى الفضاء Space.

"المستقيم Line":

وهو مجموعة غير منتهية من النقط، وكأنه يبدأ من سالب ما لا نهاية (- ∞) وينتهي بـ اللانهاية (∞) إذ لا بداية له ولا نهاية على الاطلاق، ويمر المستقيم بأي نقطتين مختلفتين في الفضاء مثل أ ، ب لذا يرمز له بأي من الرموز $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ أو $\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ والسهم بالاتجاهين ومن كلتا الجهتين.

لذا فإن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} = \overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ ويمثل بالشكل التالي:

×و

ل

- ∞ هـ ب جـ أ د ∞

ويمكن أن يسمى المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل}}$

هذا وان النقط د ، جـ ، هـ جميعاً تنتمي الى المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

أي أن جـ ، د ، هـ $\in$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ بينما و $\notin$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ وهكذا..

"الشعاع Ray":

الشعاع نصف مستقيم، له نقطة بداية ولكن لا نهاية له كما في الشكل، ويرمز له بالرمز $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ السهم باتجاه واحد. ويفضل كتابة السهم منسجماً مع اتجاه الشعاع، أي $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ شعاع بدايته النقطة أ كما في الشكل

أ ب
نقطة البداية

$\overleftarrow{\text{أ ب}}$
ب أ

والشعاع $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ بدايته النقطة ب كما في الشكل

$\overleftarrow{\text{ب أ}}$
أ ب

"القطعة المستقيمة Sigment"

من الشكل المجاور، $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ أ ب

تسمى مجموعة النقط التي عناصرها أ ، ب وجميع النقط الواقعة بينهما، قطعة مستقيمة ويرمز لها بالرمز $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ أو $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ كلاهما صواب كون للقطعة المستقيمة

بداية ولها نهاية أيضاً، وطولها = أ ب = ب – أ = أ – ب وعلاقتها بالمستقيم هو علاقة انتماء أي:

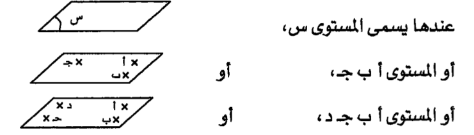
$\overleftarrow{أ ب} \ni \overleftrightarrow{ل}$ أو $\overline{أ ب} \ni \overleftrightarrow{أ ب}$ كون القطعة المستقيمة عنصر في مجموعة القطع المستقيمة أو المستقيم، فالمستقيم مجموعة قطع مستقيمة كما في الشكل:

$\overleftrightarrow{ل}$ — أ ، ب ، جـ ، د ، هـ

حجم القطع المستقيمة $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{جـ د}$ ، $\overline{د هـ}$ عناصر في مجموعة القطع المستقيمة $\overleftrightarrow{ل}$.

"المستوى Plane"

والمستوى مجموعة غير منتهية من النقط مرتبة بشكل خاص، وهو جزء من سطح منبسط ممتد من جميع أطرافه الى ما لا نهاية كسطح الورقة وسطح السبورة، ويمكن تمثيل المستوى بأي منطقة مغلقة ولغايات الدراسة يمثل منطقة رباعية ويرمز له بأحد حروف الهجاء أو بثلاثة حروف منها أو أربعة في بعض الأحيان كما في الشكل،



عندها يسمى المستوى س،

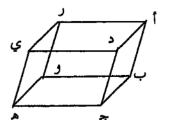
أو المستوى أ ب جـ، أو

أو المستوى أ ب جـ د، أو

وكأن الهندسة المستوية تقتصر على دراسة العلاقات بين النقط والمستقيمات التي يحويها مستوى واحد من هنا جاء اسمها "الهندسة المستوية".

مثال:

من الشكل أجب عما يلي:



× اذكر أسماء خمسة مستويات.

الجواب:

أ ب جـ د ، د جـ هـ ي ، أ د ي ر ، ب جـ هـ و ، أ ب و د

× اذكر اسماء خمسة مستقيمات:

جواب:

↔أ ب ، ↔ب جـ ، ↔جـ هـ ، ↔و هـ ، ↔د ي

× اذكر أسماء ثلاثة مستقيمات تمر بالنقطة أ:

↔أ ب ، ↔أ د ، ↔أ ر

× اذكر أسماء خمسة نقط:

أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و

× المسلمات Axioms:

وهي البديهيات التي لا تحتاج الى اثبات، سنوردها في مؤلفنا هذا مع التحقق من صحتها بالأمثلة العددية وعند الحاجة فقط.

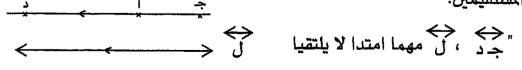
والبديهية في اللغة جملة تستخدم للتعبير عن حقيقة عامة تشرح نفسها بنفسها مثل " الكل أكبر من الجزء" فالتفاحة كاملة مثلاً أكبر من نصفها مهما بلغ حجم كليهما.

وأما في الرياضيات فالبديهية أو المسلمة تعبير يستخدم للدلالة على حقيقة هندسية تكون من البساطة بحيث يمكن افتراض صحتها دون برهان أو اثبات مثل:

"يمكن رسم مستقيم واحد يمر بنقطتين معلومتين، ويمكن مدّه من جهتيه بلا حدود".

ولقد أورد إقليدس في كتابه الأصول العديد من المسلمات أهمها مسلمة "إقليدس للتوازي" والتي تنص على ما يلي:

"لكل خط مستقيم مثل $\overleftrightarrow{ل}$ ولكل نقطة مثل أ خارجة، يوجد مستقيم واحد فقط يمر بالنقطة أ ويوازي المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$" كما في الشكل، وكلمة يوازي تعني أن المستقيمين:



"$\overleftrightarrow{جـ د}$، $\overleftrightarrow{ل}$ مهما امتدا لا يلتقيا كون البعد بينهما ثابت كما سيمر بعد قليل من التفسير".

× **النظريات Theories:**

والنظريات في الرياضيات حقائق هندسية تحتاج الى براهين واثبات، كونها العامود الفقري للبناء الهندسي المتين للرياضيات، ولكننا في هذا المؤلف بالذات لن نثبت أياً منها بل سنكتفي ببيان صحتها بواسطة الأمثلة فقط.

وعدد النظريات في الهندسة المستوية كثير جداً، سنتطرق اليها من خلال السياق كما يلي:

أوضاع المستقيمات:

للمستقيمات في المستوى أوضاع ثلاثة هي:

المستقيمات المتوازية Parallel lines.

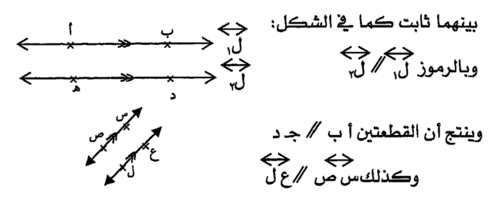
المستقيمات المتقاطعة Intersection lines.

المستقيمات المتعامدة Perpendicular lines.

حسب المسلمة القائلة "أي مستقيمين في المستوى إما أن يكونا متوازيين أو متقاطعين أو متعامدين".

فالمستقيمان المتوازيان هما المستقيمان اللذان مهما امتدا لا يلتقيا لأن البعد بينهما ثابت كما في الشكل:

وبالرموز ل١ // ل٢

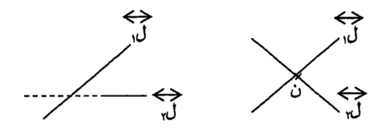


وينتج أن القطعتين أ ب // جـ د

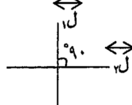
وكذلك س ص // ع ل

ومن الأمثلة على المستقيمات المتوازية، قضبان سكة الحديد، أسلاك الكهرباء، وأعمدة التلفونات، وغيرها كثير..

وعندما لا يتوازى المستقيمان فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة أو امتدادهما كما في الأشكال:



واذا كانت احدى زوايا التقاطع ٩٠° قائمة فإننا نقول أن المستقيمان متعامدان كما في الشكل:



(٣ – ٢) الزوايا Angles:

والزاوية باستخدام لغة المجموعات هي المجموعة الناتجة عن اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية ، كما في الشكل:

ويسمى كل من الشعاعين:

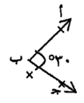
ضلع الزاوية Side of the Angle

وتسمى نقطة البداية المشتركة للشعاعين "ب" رأس الزاوية Vertex of the Angle وسنرمز للزاوية بالرمز ∡ أ ب جـ أو ∡ ب اذا لم تشترك مع غيرها بالرأس.

والا نستخدم الأرقام كما في الشكل:

حيث الزوايا ∡١ ، ∡ ٢ مشتركتان بالرأس ب

وتقاس الزاوية بوحدة القياس المعروفة بـ "الدرجة Degree" ويرمز لها بالرمز س° وبأداة شمس مستقلة.



فإذا كان مقياس الزاوية أ ب جـ = ٣٠°

فإنه يكتب ق ∡ أ ب جـ = ٣٠°

واختصاراً يكتب ∡ أ ب جـ = ٣٠°

والزوايا أنواع Types

دونك جدول بأنواع الزوايا وقياس كل منها وشكلها:

نوع الزاوية	قياسها بالدرجات	شكلها العام
(i) قائمة Right Angle	٩٠°	جـ ب أ
(ii) حادة Acute Angle	أقل من ٩٠° ٠ < حادة < ٩٠°	جـ ب أ
(iii) منفرجة Optuse Angle	أكبر من ٩٠° وأقل من ١٨٠° ٩٠° < منفرجة < ١٨٠°	جـ ب أ
(iv) مستقيمة Sbtuse Angle	١٨٠°	جـ ب أ
(v) منعكسة Rebletive Angle	أكبر من ١٨٠° وأقل من ٣٦٠° ١٨٠° < منعكسة < ٣٦٠°	أ ب جـ

مثال:

ما نوع كل من الزوايا التي قياسها:

٣٥° ⟵ النوع حادة

١٢٠° ⟵ النوع منفرجة

٨٩° ⟵ النوع حادة

٩٠° ⟵ النوع قائمة

٢٤٠° ⟵ النوع منعكسة

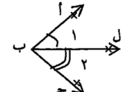
قائمتين ⟵ النوع مستقيمة

أوضاع الزوايا:

للزوايا الأوضاع التالية:

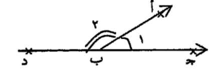
الزاويتان المتجاورتان Adiacent Angles:

هما الزاويتان اللتان تشتركان في رأس واحد وضلع واحد ونقصان في جهتين مختلفتين من الضلع المشترك كما في الشكل:



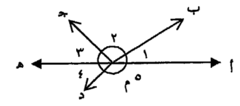
وقياس الزاويتين المتجاورتين وعلى خط مستقيم

يساوي قائمتين أو ١٨٠° كما في الشكل:



ق ∢١ + ق ∢٢ = ١٨٠° (على خط مستقيم)

وقياس الزوايا المتجاورة والمتجمعة حول نقطة تساوي ٣٦٠° كما في الشكل:

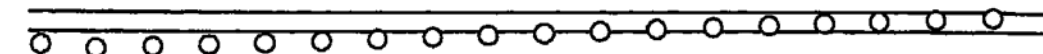


ق ∢١ + ق ∢٢ + ق ∢٣ + ق ∢٤ + ق ∢٥ = ٣٦٠° (حول نقطة)

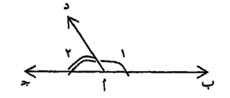
الزاويتان المتكاملتان Supplementery Angles:

هما الزاويتان اللتان مجموع قياسهما ١٨٠° مثل الزاويتين:

∢أ = ١١٠° ، ∢ب = ٧٠°



والزاويتان المتجاورتان وعلى خط مستقيم مجموع قياسهما 180° كما مرّ سابقاً، لذا تسميان زاويتان متكاملتان كما في الشكل:



∢١ تكمل ∢٢

لأن ∢١ + ∢٢ = 180°

متجاورتان وعلى خط مستقيم.

مثال:

أوجد تكملة الزاوية 87°، اذا كانت ∢س تكمل 87° فإن:

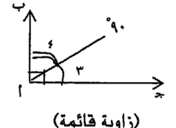
∢س + 87° = 180°

∢س + 180° = 87° = 93°

كون 93° + 87° = 180°

والزاويتان المتتامتان Complementary Angles:

هما الزاويتان اللتان مجموع قياسهما كما في الشكل:



(زاوية قائمة)

∢٣ تتم ∢٤

لأن ∢٣ + ∢٤ = 90°

مثال:

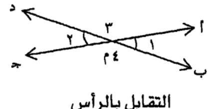
أوجد قيمة الزاوية 53° ، اذا كانت ∢س تتمم 53°

فإن ∢س + 53° = 90° ⟵ ∢س = 90° - 53° = 37°

كون 37° + 53° = 90°

الزاويتان المتقابلتان بالرأس Vertically opposite Angles:

هما الزاويتان الناتجتان من تقاطع مستقيمين ومتساويتين بالقياس كما في الشكل:



∢ ١ = ∢ ٢ التقابل بالرأس

وهذا صواب بالقياس الدقيق لكل من الزاويتين.

وكذلك ∢ ٣ = ∢٤ التقابل بالرأس

× **الزاويتان المتخالفتان Apdied Angle:**

هما الزاويتان الواقعتان داخل المستقيمين المتوازيين وبجهة واحدة من القاطع، ومجموع قياسهما ١٨٠° كما في الشكل:

اذا كان أ ب // جـ د

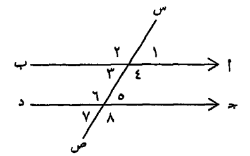
و س ص قاطع لهما

مثل ∢٤ + ∢٥ = ١٨٠°

(بوضع تحالف)

وكذلك ∢٣ + ∢ ٦ = ١٨٠°

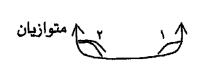
(بوضع تحالف)



ومن الملاحظ أن وضع الزاويتين المتحالفتين يشبه حرف U في اللغة الانجليزية هكذا:

∢ ١ + ∢ ٢ = ١٨٠°

بوضع تحالف



الزاويتان المتبادلتان Apternate Angles:

هما الزاويتان الواقعتان بين المستقيمين (داخليين) وعلى جهتين مختلفتين من القاطع، والمتساويتان بالقياس. كما في الشكل:

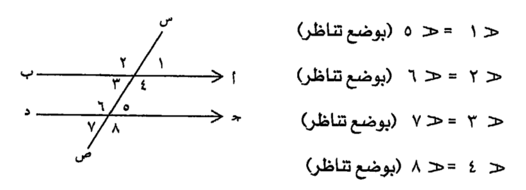
∠ ٣ = ∠ ٥ (بوضع تبادل)

وكذلك ∠ ٤ = ∠ ٦ (بوضع تبادل)

وتشكلان حرف Z بالانجليزية

الزاويتان المتناظرتان Corresponding Amgles:

هما الزاويتان الداخلية (تقع بين المستقيمين المتوازيين) والخارجية (تقع خارج المستقيمين المتوازيين) ولكنهما على جهة واحدة من القاطع، والمتساويتان بالقياس. كما في الشكل:



∠ ١ = ∠ ٥ (بوضع تناظر)

∠ ٢ = ∠ ٦ (بوضع تناظر)

∠ ٣ = ∠ ٧ (بوضع تناظر)

∠ ٤ = ∠ ٨ (بوضع تناظر)

وتشكلان حرف F بالانجليزية.

وباختصار مفيد:

∠ ١ + ∠ ٢ = ١٨٠ (تحالف) ∠٦ = ∠٥ (تبادل) ∠٣ = ∠ ٤ تناظر

∠ ٧ = ∠ ٨ تقابل بالرأس ∠أ + ∠ب = ١٨٠° (متكاملتان) ∠جـ + ∠د = ٩٠° (متتامتان)

مثال:

ما قياس كل من الزوايا التالية كما في الشكل، مع ذكر السبب:

∢ ٥ ، ∢ ١

∢ ٢ ، ∢ ٦

الحل:

∢ ٥ = ٧٠° (تقابل بالرأس)

∢ ١ = ٧٠° (تناظر)

∢ ٢ = ١٨٠° - ٧٠° = ١١٠°

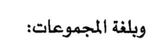
كون ٧٠° + ∢ ٢ = ١٨٠° متجاورتان على خط مستقيم

∢ ٦ = ∢ ٢ تبادل

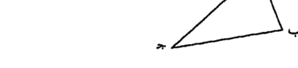
= ١١٠°

(٣-٣) المثلث Triangle:

المثلث شكل هندسي – جزء من مستوى – محاط بثلاث قطع مستقيمة متقاطعة مثنى كما في الشكل:



وبلغة المجموعات:



المثلث مجموعة من النقط مثل {أ ، ب ، جـ} غير المستقيمة، أي لا تقع ثلاثتها على استقامة واحدة.

أي هو اتحاد ثلاث قطع مستقيمة متقاطعة مثنى وبالرموز:

أ ب جـ = أ ب ∪ ب جـ ∪ جـ أ ويقرأ المثلث أ ب جـ

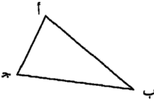
حيث النقط أ ، ب ، جـ تسمى رؤوسه (عددها ثلاثة رؤوس فقط)

والقطع المستقيمة أ ب ، ب جـ ، جـ أ تسمى أضلاعه (عددها ثلاثة أضلاع فقط)

والزوايا ∢ أ ، ∢ ب ، ∢ جـ تسمى زواياه الداخلية (عددها ثلاثة زوايا فقط)

وأما محيطه = أ ب + ب جـ + جـ أ

وعدد الوحدات المربعة التي يحتويها محيطه داخله تسمى مساحته كما في الشكل:



ومن الملاحظ أن للمثلث ٣ أضلاع وله أيضاً ٣ زوايا، وعند جمعها معاً يُصبح للمثلث ٦ عناصر هي ٣ أضلاع، ٣ زوايا، وهذا العدد يطابق تماماً عدد أنواعه.

حيث للمثلث ٦ أنواع هي:

من حيث أضلاعه (٣ أنواع) هي:

اسم المثلث	الشكل
مختلف الأضلاع	أ ب جـ
متساوي الساقين Isosceles Triangle	أ ب جـ
متطابق الأضلاع Equally Triangle	أ ب جـ

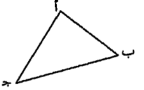
ومن حيث زواياه: (٣ أنواع) هي:

الاسم	الشكل
حاد الزوايا	أ ب جـ حادة حادة حادة
قائم الزاوية	أ ب جـ
منفرج الزاوية	أ ب جـ منفرجة

خصائص المثلث:

للمثلث بشكل عام كثير من الخصائص نوجزها بما يلي:

(i) مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية تساوي ١٨٠° = قائمتين



وبالرموز:

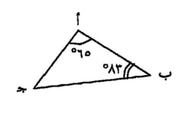
"للتبسيط تستخدم ∢أ بدلاً من قياس ∢أ"

∢أ + ∢ب + ∢جـ = ١٨٠° (زوايا داخلة للمثلث)

مثال:

أ ب جـ مثلث فإذا كانت ∢أ = ٦٥° ، ∢ب = ٨٣° أوجد ∢جـ.

بما أن ∢أ + ∢ب + ∢جـ = ١٨٠ (زوايا داخلة مثلث)



٦٥° + ٨٣° + ∢جـ = ١٨٠°

١٤٨° + ∢جـ = ١٨٠°

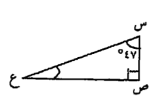
- ١٤٨° - ١٤٨

∴ ∢جـ = ٣٢°

مثال:

س ص ع مثلث قائم الزاوية في ∢ص فإذا كانت ∢س = ٤٧° أوجد ∢ع

بما أن ∢س + ∢ص + ∢ع = ١٨٠° (زوايا داخلة مثلث)



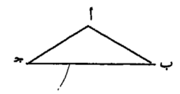
٤٧° + ٩٠° + ∢ع = ١٨٠°

١٣٧° + ∢ع = ١٨٠°

- ١٣٧ - ١٣٧

∴ ∢ع = ٤٣°

(ii) مجموع طولي أي ضلعين في المثلث أكبر من طول الضلع الثالث في جميع الأنواع وبالرموز:



أ ب + ب جـ > أ جـ

ب جـ + أ جـ > أ ب

أ جـ + أ ب > ب جـ

وهذا شرط أساسي وهام لرسم أي مثلث.

لذا فالقطع المستقيمة التي أطوالها ٥ ، ٨ ، ١٠ سم تصلح لانشاء (لرسم) مثلث.

لأن ٥ + ٨ > ١٠ كون ١٣ > ١٠

وكذلك ٨ + ١٠ > ٥ كون ١٨ > ٥

وكذلك ٥ + ١٠ > ٨ كون ١٥ > ٨

بينما القطع المستقيمة التي أطوالها ٥ سم ، ٨ سم ، ١٥ سم لا تصلح لانشاء (لرسم) مثلث لأن:

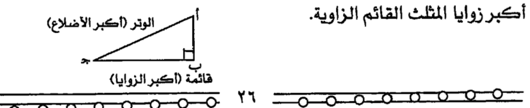
٥ + ٥ ≯ ١٥ كون ١٣ ≯ ١٥

(ليس أكبر من)

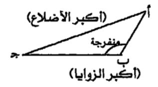
(iii) الضلع الأكبر في أي مثلث يقابل الزاوية الكبرى والضلع الأصغر يقابل الزاوية الضلع، وبديهياً الضلع الأوسط يقابل الزاوية الوسطى. والعكس للجميع صواب.

وبناء عليه فإن:

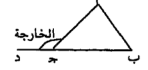
الوتر في المثلث القائم الزاوية هو أكبر الأضلاع كونه يقابل الزاوية القائمة أكبر زوايا المثلث القائم الزاوية.



والضلع المقابل للزاوية المنفرجة في المثلث المنفرج الزاوية هو أكبر الأضلاع كون الزاوية المنفرجة في المثلث المنفرج الزاوية أكبر الزوايا.



(iv) اذا مُدَّ أحد أضلاع المثلث من جهة واحدة فإنه ينشئ زاوية خارجة عنه تسمى الزاوية الخارجة كما في الشكل:



∡ أ جـ د الزاوية الخارجة

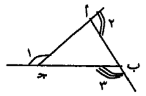
وقياس الزاوية الخارجة ∡ أ جـ د =

مجموع قياسي الزاويتين الداخلتين ∡ أ ، ∡ب ما عدا المجاورة لها.

وبالرموز ∡أ جـ د = ∡ أ + ∡ ب (خارجة للمثلث)

ولذلك اذا مُدت جميع أضلاع المثلث وباتجاه واحد.

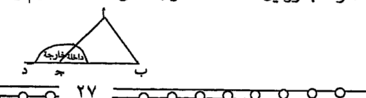
ولذلك اذا مُدَّ كل ضلع من أضلاع المثلث وكون زاوية خارجة وباتجاه واحد كما في الشكل:



كانت مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمثلث = ٣٦٠°

وبالرموز ∡ ١ + ∡ ٢ + ∡٣ = ٣٦٠°

وبناء على ذلك فإن مجموع قياسي (الزاوية الخارجة للمثلث والزاوية الداخلة له) والمتجاورتين = ١٨٠° كونها على خط مستقيم واحد. كما في الشكل:



مثال:

احسب ∠ أ جـ د ، ∠ أ



∠أ جـ د + ٦٠° = ١٨٠° (متجاورتين على خط مستقيم)

- ٦٠° - ٦٠°

∠أ جـ د = ١٢٠°

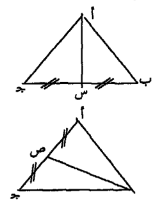
لكن ∠أ جـ د = ∠أ + ∠ ب (خارجة)

١٢٠° = ∠أ + ٥٠°

- ٥٠° - ٥٠°

٧٠° = ∠أ

(٧) المستقيم المتوسط Mid Line في المثلث هو المستقيم (قطعة مستقيمة) الواصل بين رأس المثلث ومنتصف الضلع المقابل له. كما في الشكل:

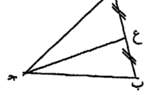


أ س مستقيم متوسط.

وكذلك:

ب ص مستقيم متوسط

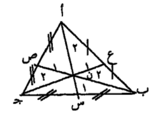
وكذلك:



جـ ع مستقيم متوسط

لكل مثلث ثلاثة مستقيمات (قطع مستقيمة) متوسطة ولها من الصفات ما يلي:

أولاً: المستقيمات المتوسطة في أي مثلث تلتقي في نقطة واحدة مثل ن كما في الشكل:



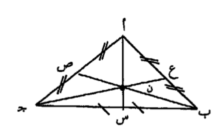
ثانياً: هذه النقطة ن تقسم كل مستقيم متوسط بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس.

مثال:

اذا كانت أطوال:

أ س = ٦سم ،   ب ص = ٩ سم

جـ ع = ١٢ سم



أوجد أطوال:

بما أن كل مستقيم متوسط يقسم بنسبة ٢ :١ جهة الرأس.

ن أ = $\frac{٢}{٣}$ × ٦ = ٤ سم

ن س = $\frac{١}{٣}$ × ٦ = ٢ سم

ن جـ = $\frac{٢}{٣}$ × ١٢ = ٨ سم

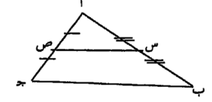
ن ع = $\frac{١}{٣}$ × ١٢ = ٤ سم

ن ب = $\frac{٢}{٣}$ × ٩ = ٦ سم

ن ص = $\frac{١}{٣}$ × ٩ = ٣ سم

(vi) في أي مثلث:

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وتساوي نصفه كما في الشكل:



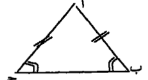
س ص // ب جـ أولاً

ثم س ص = $\frac{١}{٢}$ ب جـ ثانياً

ولبعض أنواع المثلثات خصائص أخرى نجملها بما يلي:

(i) خصائص المثلث المتساوي الساقين:

تتساوى قياسي زوايتي القاعدة في المثلث المتساوي الساقين والعكس صواب. كما في الشكل:



أي أن:

أولاً: اذا كان طول أ ب = طول أ جـ

فإن ∢ ب = ∢ جـ

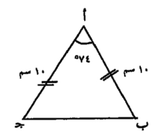
ثانياً: اذا كان ∢ب = ∢ جـ

فإن طول أ ب = أ جـ

مثال:

اذا كان أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ = ١٠ سم ، ∢أ = ٧٤°

أوجد ∢ب ، ∢جـ



بما أن طول أ ب = طول أ جـ = ١٠ سم

فإن أ ب جـ متساوي الساقين

لذا فإن ∢ب = ∢جـ

لكن ∢أ + ∢ ب + ∢جـ = ١٨٠° (زوايا داخلة في المثلث)

∴ ٧٤° + ∢ ب + ∢ جـ = ١٨٠°

− ٧٤° − ٧٤°

∢ ب + ∢جـ = ١٠٦°

وبما أن ∠ ب = ∠ جـ

فإن ∠ ب = $\frac{106°}{2}$ = 53°

وكذلك ∠ جـ = $\frac{106°}{2}$ = 53°

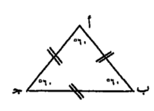
(ii) خصائص المثلث المتطابق الأضلاع:

جميع قياسات زوايا المثلث المتطابق الأضلاع متساوية.

وقياس كل منها= $\frac{108°}{2}$ = 60°

لذا فإنه يسمى المثلث النسبي

حيث قياس كل زاوية = 60°



والعكس صواب اذا تساوت قياسات زوايا مثلث فإنه تصبح مثلث متطابق الأضلاع (جميع أضلاعه متساوية).

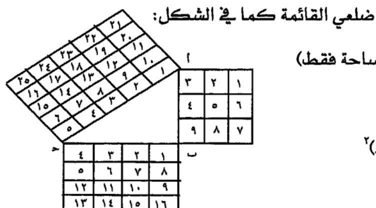
خصائص المثلث القائم الزاوية:

للمثلث القائم الزاوية أهمية بالغة وفائدة عظيمة في الرياضيات، كون أضلاعه تُجسد مضمون نظرية فيثاغورس (٥٧٢ – ٤٩٧) ق. م.

نظرية فيثاغورس:

تنسب هذه النظرية الى واضعها فيثاغورس ونصها:

في المثلث القائم الزاوية: مساحة المربع المنشأ على الوتر (الضلع المقابل للزاوية القائمة) يكافئ سجموع مساحتي المربعين المنشأين على ضلعي القائمة كما في الشكل:



(التكافؤ = التساوي بالمساحة فقط)

واختصاراً وبالرموز:

(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

ويمكن الاستفادة من استخدام هذه النظرية في ايجاد طول ضلع في مثلث قائم الزاوية اذا علمت منه أطوال الضلعين الآخرين كما يلي:

مثال:

احسب طول أ جـ في المثلث أ ب جـ القائم الزاوية.

أ
٥ سم
جـ ب
١٢ سم

(نظرية فيثاغورس)

(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

(أ جـ)^{٢} = (٥)^{٢} + (١٢)^{٢}

= ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩

(أ جـ)٢ = ١٦٩ ⟵ أ جـ = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣ سم

مثال:

احسب طول الضلع ص ع في المثلث القائم الزاوية س ص ع المجاور:

(س ع)^{٢} = (س ص)^{٢} + (ص ع)^{٢} (نظرية فيثاغورس)

(٤١)^{٢} = (٩)^{٢} + (ص ع)^{٢}

١٦٨١ = ٨١ + (ص ع)^{٢}

- ٨١ - ٨١

١٦٠٠ = (ص ع)^{٢}

ص ع = $\sqrt{١٦٠٠}$ = ٤٠ سم.

وعكس النظرية أيضاً صواب:

نص عكس النظرية:

اذا كان مساحة المربع المنشأ على الضلع الأكبر في أي مثلث يكافئ مجموع مساحتي المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين، كان المثلث قائم الزاوية، وفي الزاوية التي تقابل أكبر الأضلاع حيث:

تصبح الزاوية قائمة والضلع المقابل لها يصبح وتراً.

مثال:

هل المثلث أ ب جـ الذي أطوال اضلاعه ٦ ، ٨ ، ١٠ سم قائم الزاوية؟

أكبر الأضلاع أ جـ = ١٠

(أ جـ)^{٢} = (١٠)^{٢} = ١٠

(ب جـ)^{٢} = (٨)^{٢} = ٦٤

\+ (أ ب)^{٢} = (٦)^{٢} = ٣٦

٦٤ + ٣٦ = ١٠٠٠

بما أن $(أ\ جـ)^2 = (أ\ ب)^2 + (ب\ جـ)^2$

∴ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب كما يلي:

مثال:

هل المثلث أ ب جـ الذي أطوال أضلاعه ٩ ، ١١ ، ١٥ سم قائم الزاوية؟

أكبر الأضلاع: ب جـ

$(ب\ جـ)^2 = (١٥)^2 = ٢٢٥$

$(أ\ ب)^2 = (٩)^2 = ٨١$

$(أ\ جـ)^2 = (١١)^2 = ١٢١$

$٨١ + ١٢١ = ٢٠٢$

بما أن $(ب\ جـ)^2 \neq (أ\ ب)^2 + (أ\ جـ)^2$

فالمثلث أ ب جـ ليس قائم الزاوية اطلاقاً.

وبشكل عام: ان المثلثات التي تكون النسبة بين أطوال أضلاعها

كنسبة ٣ : ٤ : ٥

و ٥ : ١٢ : ١٣

و ٩ : ٤٠ : ٤١

و ٨ : ١٥ : ١٧

هي مثلثات قائمة الزاوية

والتفسير: المثلث الذي أطوال أضلاعه ٨ ، ١٥ ، ١٧ سم

مثلث قائم الزاوية لأن: $(١٧)^2 = (٨)^2 + (١٥)^2$

كون: ٢٨٩ = ٦٤ + ٢٢٥ = ٢٨٩

وكذلك المثلث الذي أطوال أضلاعه ٢(٨ ، ١٥ ، ١٧)

أي ١٦ ، ٣٠ ، ٣٤ قائم الزاوية

لأن $(٣٤)^{٢} = (١٦)^{٢} + (٣٠)^{٢}$

كون ١١٥٦ = ٢٥٦ + ٩٠٠ = ١١٥٦

وكذلك المثلث الذي أطوال أضلاعه ٣(٨ ، ١٥ ، ١٧)

أي ٢٤ ، ٤٥ ، ٥١ قائم الزاوية

لأن $(٥١)^{٢} = (٢٤)^{٢} + (٤٥)^{٢}$

كون ٢٦٠١ = ٥٧٦ + ٢٠٢٥ = ٢٦٠١

وهكذا....

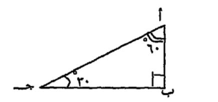
وهناك مثلثات قائمة الزاوية لها أهمية خاصة مثل:

المثلث الذي زواياه ٣٠° ، ٦٠° ، ٩٠° وسمي المثلث السينيي الثلاثي.

فإن الضلع المقابل للزاوية ٣٠°

يساوي نصف الوتر أي أن

أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ جـ



وهذه نصائح بالنظرية التالية:

نظرية: في المثلث القائم الزاوية فإن طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° يساوي نصف طول الوتر.

مثال:

احسب طول أ ب جـ ، ب جـ

أ ب = ($\frac{١}{٢}$) (١٠) = ٥ سم

وحسب نظرية فيتاغورس:

(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

(١٠)^{٢} = (٥)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

١٠٠ = ٢٥ + (ب جـ)^{٢}

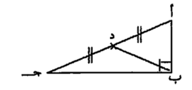
- ٢٥ - ٢٥

٧٥ = (ب جـ)^{٢}

ب جـ = $\sqrt{٧٥}$ = $\sqrt{٥ \times ٥ \times ٣}$ = ٥ $\sqrt{٣}$ سم

وهناك نظرية أخرى:

تتعلق في المثلث القائم الزاوية



هذا نصها:

القطعة المستقيمة الواصلة من القائمة (في المثلث القائم الزاوية) الى منتصف الوتر تساوي نصف الوتر.

ومن الشكل : ب د = $\frac{\text{أ جـ}}{٢}$

فإذا كان المثلث القائم الزاوية سيني ثلاثي

يكون أ ب = $\frac{١}{٢}$ الوتر = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

وكذلك ب د = $\frac{١}{٢}$ الوتر = $\frac{١}{٢}$ جـ

ومنها أ ب = ب د

فالمثلث أ ب د متطابق الأضلاع.

والمثلث د ب جـ متساوي الساقين.

وهناك المثلث القائم الزاوية المتساوي الساقين

كما في الشكل:

فإذا كان طول الضلع أ ب = طول الضلع ب جـ = س سم

مثلاً فإن:

(أ جـ)^{٢} = (س)^{٢} + (س)^{٢} (نظرية فيتاغورس)

(أ جـ)^{٢} = ٢ س^{٢}

∴ أ جـ = $\sqrt{٢ س^{٢}}$ = $\sqrt{٢}$ س

فطول الوتر في المثلث القائم الزاوية المتساوي الساقين والذي طول ساقه ٨ سم

هو $\sqrt{٢}$ × ٨ = ٨ $\sqrt{٢}$ سم.

= (١,٤) = ١١,٢ سم تقريباً.

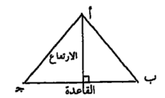
× **مساحة المثلث:**

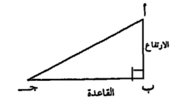
يمكن ايجاد مساحة المثلث بطريقتين هما:

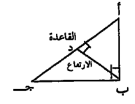
الطريقة الأولى (معرفة القاعدة والارتفاع):

كما يلي:

لأي مثلث مهما كان نوعه القاعدة هي ضلع من أضلاعه، والعامود النازل عليها من رأسه المقابل يسمى الارتفاع كما في الأشكال التالية:



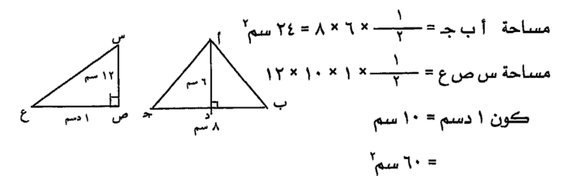




مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × طول القاعدة × طول الارتفاع.

مثال:

ما مساحة كل من المثلثات التالية:



مساحة أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ سم^{٢}

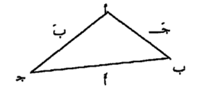
مساحة س ص ع = $\frac{١}{٢}$ × ١ × ١٠ × ١٢

كون ١ دسم = ١٠ سم

= ٦٠ سم^{٢}

الطريقة الثانية (معرفة أطوال أضلاعه الثلاثة):

في المثلث أ ب جـ وللتبسيط:



نرمز للضلع المقابل للزاوية أ بالرمز أَ

ونرمز للضلع المقابل للزاوية ب بالرمز بَ

ونرمز للضلع المقابل للزاوية جـ بالرمز جَ كما في الشكل.

مساحة المثلث بدلالة أضلاعه جميعها:

$$= \sqrt{ح\,(ح - أَ)\,(ح - بَ)\,(ح - جَ)}$$

حيث ح = نصف محيط المثلث

أي ح = $\frac{أَ + بَ + جَ}{٢}$

مثال:

ما مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه ١٦ ، ١٢ ، ٨ سم

وما طول محيطه؟

$$ح = \frac{أَ + بَ + جَ}{٢} = \frac{٣٦}{٢} = ١٨ \text{ سم}$$

$$\text{مساحة أ ب جـ} = \sqrt{١٨\ (١٨ - ٨)\ (١٨ - ١٢)\ (١٨ - ١٦)}$$

$$= \sqrt{١٨ \times ١٠ \times ٦ \times ٢}$$

$$= \sqrt{٣ \times ٣ \times ٢ \times ٥ \times ٢ \times ٣ \times ٢ \times ٢}$$

$$= ٣ \times ٢ \times ٢ \sqrt{١٥} = ١٢\sqrt{١٥}$$

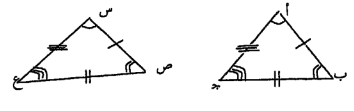
$$= (١٢)\ (٣,٨) = ٤٥,٦ \text{ سم}^٢$$

أما محيطه = ١٦ + ١٢ + ٨ = ٣٦ سم

تطابق المثلثات:

يُقال أن المثلثين متطابقان اذا أمكن وضع أحدهما على الآخر بحيث تنطبق رؤوس المثلث الأول على رؤوس المثلث الثاني والعكس. ويتم ذلك بتساوي ثلاثة عناصر من عناصر كل مثلث بنظائرها من عناصر المثلث الآخر –ثلاثة عناصر بما فيها ضلع على الأقل- وينتج من تطابقهما تساوي الأضلاع المتناظرة الباقية، وتساوي قياسات الزوايا المتناظرة الباقية ثم تساوي مساحتيهما ايضاً.

فالتطابق هو التساوي في جميع العناصر من زوايا وأضلاع ومساحات أيضاً كما في الشكل:



وعليه يبدو المثلثان وكأنهما مثلث واحد كتطابق راحتي اليدين الاثنتين عند وضعها على بعضهما البعض.

فالمثلثان المتطابقان متساويان بالعناصر التالية المتناظرة:

فإذا كان أ ب جـ يطابق س ص ع فإن:

∢أ = ∢س وكذلك أ ب = س ص وكذلك مساحة أ ب جـ = مساحة س ص ع

∢ب = ∢ص ب جـ = ص ع

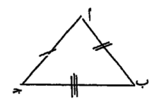
∢جـ = ∢ع جـ أ = ع س

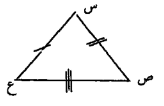
والعكس أيضا صواب، ولكن ليس بهذا الاجماع بل يكفي ليطابق المثلثين تساوي ٣ عناصر من عناصر المثلث الأول بنظائرها من عناصر المثلث الثاني (على الأقل ضلع من ضمنها) كما يلي:

يتطابق المثلثان أ ب جـ ، س ص ع بوجود حالة من الحالات الأربع التالية:

الحالة الأولى (أطوال ثلاثة أضلاع):

أي اذا تساوت أطوال الأضلاع الثلاثة من المثلث الأول بنظائرها في المثلث الثاني كما في الشكل:





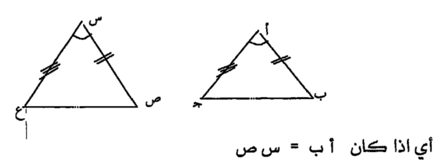
أي ان كان أ ب = س ص

ب جـ = ص ع

جـ أ = ع س

الحالة الثانية (طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما):

أي اذا تساوى طولا ضلعين في المثلث الأول بنظائرها من المثلث الثاني وكذلك قياس الزاوية المحصورة بين كل ضلعين في كليهما. كما في الشكل:



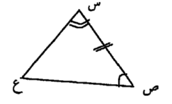
أي اذا كان أ ب = س ص

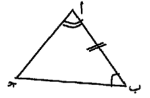
أ جـ = س ع

∢ أ = ∢ س

الحالة الثالثة (قياس زاويتين وطول وضلع):

أي اذا تساوى قياسا زاويتين في المثلث الأول بنظائرها من المثلث الثاني وضوع ضلع في كليهما. كما في الشكل:





أي اذا كان ∢ أ = ∢ س

أ ب = س ص

∢ ب = ∢ ص

الحالة الرابعة (طول وتر وطول ضلع وقائمة):

أي اذا تساوى طولا الوترين في كليهما وضلعين والقائمتين أيضاً. كما في الشكل:

أ جـ = س ع

∡ ب = ∡ ص

أ ب = س ص

والحالة الرابعة بالذات حالة خاصة بالمثلثات القائمة الزاوية فقط:

والسؤال: ما ينتج عن تطابق المثلثين؟

الجواب: ينتج المتساويات التالية:

(i) تساوي باقي العناصر (الستة) في كل من المثلثين.

(ii) تساوي بالمساحة.

مثال:

في الشكل المجاور

بيّن أن أ ب = د هـ

أ ب ∥ د هـ

الحل:

المثلثان أ ب جـ ، هـ جـ د

فيهما	أ جـ = جـ د	(بالمعطيات)
	ب جـ = جـ هـ	(بالمعطيات)
	∡ ١ = ∡ ٢	(تقابل بالرأس)

يتطابق المثلثين بحالة ضلعين وزاوية محصورة بينهما.

وينتج أن: أ ب = د هـ وهو المطلوب الأول

وكذلك: ∢٣ = ∢٤ وهما بوضع تبادل

أ ب // د هـ وهو المطلوب الثاني

ومن الجدير بالذكر أن هناك بعض العمليات الهندسية أو الانشاءات كناتج لتطابق المثلثان، وباستخدام الأدوات الهندسية "المسطرة المدرجة والفرجار" ومنها:

(i) نقل الزاوية: "أو رسم زاوية مطابقة لزاوية معلومة":

لنقل الزاوية أ ب جـ كما في الشكل:

بالمسطرة والفرجار فقط

نقوم بالخطوات الاجرائية التالية:

نرسم الشعاع ص ع،

ونركز رأس الفرجار على النقطة ب رأس

الزاوية وبفتحة مناسبة تقطع ضلعي

الزاوية في النقطتين د ، هـ

ثم نركز رأس الفرجار على النقطة ص

ونرسم القوس نفسه ليقطع الشعاع ص ع في ل

ثم نأخذ البعد هـ د ونركز في ل ونقطع البعد نفسه في ك.

فتكون الزاوية ل ص ك وبانطباق المثلثين د هـ ب ، ك ل ص

بثلاثة أضلاع ينتج أن ∢ ب = ∢ ص وهو المطلوب.

(ii) تنصيف الزاوية:

لتنصيف الزاوية أ ب جـ كما في الشكل:

نقوم بالاجراءات التالية:

نفتح الفرجار فتحة مناسبة

ونركزه في الرأس ب ونقطع

ضلعي الزاوية في النقطتين د ، هـ

ثم نفتح الفرجار فتحة أخرى مناسبة ونركز في النقطة د ، ثم هـ ونقطع قوسين كما في النقطة ل.

نصل ب ل ، فيكون ب ل نفسه منتصف الزاوية ∠ ب وذلك بانطباق المثلثين:

ل هـ ب ، ل د ب	بثلاثة أضلاع
ل هـ = ل د	نفس الفتحة بالفرجار
هـ ب = د ب	نفس الفتحة بالفرجار
ل ب = ل ب	مشترك

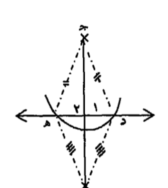
ينتج من الانطباق أن:

∠١ = ∠٢

أي أن ل ب منصف للزاوية ∠ب.

(iii) ومن هذه التطبيقات يمكن انزال عامود على مستقيم من نقطة خارجة، واقامة عامود على مستقيم من نقطة عليه كما في الشكلين التاليين:

انزال عامود من جـ



نركز الفرجار جـ وبفتحه مناسبة
نقطع المستقيم في النقطتين د ، هـ
وبفتحة مناسبة اخرى أو نفسها
نركز في د ، هـ ونقطع قوسين
في نقطة ل

يكون ل جـ عامود نازل من جـ
على المستقيم $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$

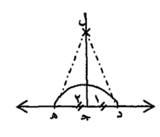
من انطباق المثلثين جـ د ل ، جـ هـ ل
(بثلاثة أضلاع)

ينتج أن ∠١ = ∠٢ ولكون
∠١ + ∠٢ = ١٨٠°
على خط مستقيم

فإن ∠١ = ∠٢ = قائمة

∴ جـ ل عامود نازل من جـ





نركز الفرجار في جـ وبفتحة مناسبة
نرسم القوس ليقطع المستقيم في د ، هـ
وبفتحة أخرى نركز في د ، هـ ونقطع
قوسين في ل

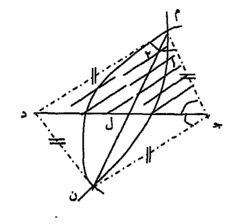
فيكون جـ ل العامود المقام وبانطباق
المثلثين د ل جـ ، هـ ل جـ بثلاثة أضلاع
ينتج أن ∠١ = ∠٢
وكون ∠١ + ∠٢ = ١٨٠°
(على خط مستقيم)

∠١ = ∠٢ قائمة

∴ جـ ل عامود مقام من جـ

(iv) وأخيراً تنصيف قطعة مستقيمة:

مثل جـ د



نركز الفرجار في النقطة جـ

وبفتحة مناسبة نرسم القوس

(هذه الفتحة أكبر من نصف القطعة جـ د) ونركز الفرجار في د وبنفس الفتحة

نقطع القوس الأول في النقطتين م ، ن نصل م ن

فيكون جـ ل = ل د

بانطباق المثلثين م جـ ن ، م د ن بثلاثة اضلاع

ينتج أن ∢١ = ∢٢

وبانطباق المثلثين م جـ ل ، م د ل بضلعين وزاوية محصورة

ينتج أن جـ ل = ل د وهو المطلوب.

تشابه المثلثات Similar Trangles:

برزت فكرة التشابه الى حيز الوجود نتيجة لعملية تكبير أو تصغير الأشكال الهندسية ومقارنتها بأصولها وعلى وجه الخصوص المثلثات منها.

فالمثلثان المتشابهان هما المثلثان اللذان تتساوى فيهما قياسات زوايا أحدهما بنظائرها من المثلث الآخر وتتناسب أضلاعهما المتناظرة أيضاً.

كما في الشكل:

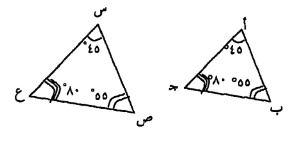
حيث المثلث أ ب جـ يشابه المثلث س ص ع

وحالات تشابه المثلثات

هي الأربع الآتية:

الحالة الأولى:

يتشابه المثلثان اذا كانت قياسات زواياهما المتناظرة متساوية كما في الشكل:



حيث:

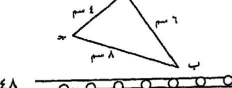
∡أ = ∡س = ٤٥°

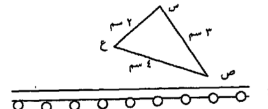
∡ب = ∡ص = ٥٥°

∡جـ = ∡ع = ٨٠°

الحالة الثانية:

يتشابه المثلثان اذا كانت أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة كما في الشكل:





بما أن $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{س ع}} \leftarrow \frac{٣}{٦} = \frac{٤}{٨} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

أي كون أضلاع المثلثين أ ب جـ ، س ص ع متناسبة فإن المثلثين متشابهان.

والسؤال: ما ينتج من تشابه المثلثين؟

الجواب: من تشابه المثلثين ينتج أن قياسات الزوايا المتناظرة متساوية، والأضلاع المتناظرة متناسبة.

هكذا: بما أن زوايا المثلث أ ب جـ تساوي نظائرها من زوايا المثلث س ص ع فإن المثلثان متشابهان أي أن:

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{س ع}}$$

وبما أن أضلاع المثلثين أ ب جـ ، س ص ع متناسبة. فإن زوايهما متساوية بالقياس تماماً.

حسب المخطط التالي:

اذا كانت الزوايا المتناظرة متساوية ← المثلثين متشابهين ← الأضلاع متناسبة (أو)

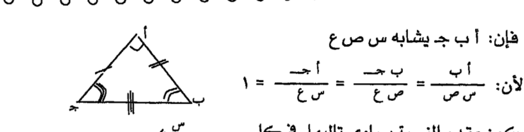
واذا كانت الأضلاع متناسبة ← المثلثين متشابهين ← الزوايا متساوية

دونك الآن هذه الحقيقة والتي نصها:

اذا تطابق المثلثان فإنهما يكونان متشابهين "وليس العكس؟؟؟

وبيان صحة هذه الحقيقة للعيان، كون التطابق يعني التساوي في جميع الخصائص والصفات، فزوايا المثلث الأول أ ب جـ تساوي نظائرها من زوايا المثلث الثاني س ص ع وأضلاعهما متناسبة (كونها متساوية مع نظائرها).

أي أن: اذا كان أ ب جـ يطابق س ص ع



فإن: أ ب جـ يشابه س ص ع

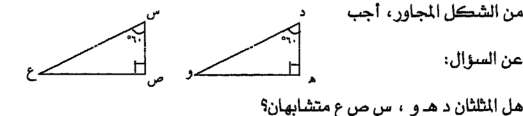
لأن: $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{س ع}} = ١$

كون مقدم النسبة يساوي تاليها في كل من النسب السابقة.

والعكس ليس صواب، أي أن المثلثين المتشابهين غير متطابقين إلا في حالة تساوي أضلاعها المتناظرة فقط.

مثال:

من الشكل المجاور، أجب عن السؤال:



هل المثلثان د هـ و ، س ص ع متشابهان؟

الجواب:

بما أن ∠و = ١٨٠° - {٦٠° + ٩٠°} = ١٨٠° - ١٥٠° = ٣٠°

وكذلك ∠ع = ١٨٠° - {٦٠° + ٩٠°} = ١٨٠° - ١٥٠° = ٣٠°

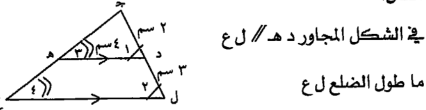
أي أن زوايا المثلث د هـ و تساوي نظائرها من المثلث س ص ع

∴ المثلثان متشابهان.

مثال:

في الشكل المجاور د هـ // ل ع

ما طول الضلع ل ع



الحل:

المثلثان جـ د هـ ، جـ ل ع متشابهان

كون ∢ جـ = ∢ جـ مشتركة في المثلثين

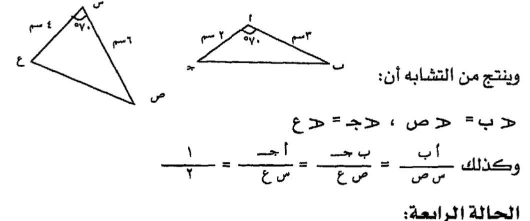
∢ ١ = ∢ ٢ بالتناظر كون د هـ // ل ع بالمعطيات

∢ ٣ = ∢ ٤ بالتناظر كون د هـ // ل ع بالمعطيات

فالمثلثان متساويان.

الحالة الثالثة:

يتشابه المثلثان اذا كان أطوال زوجين من الأضلاع المتناظرة فيهما متناسبة والزاويتان المحصورتان بينهما متساويتين بالقياس كما في الشكل:



وينتج من التشابه أن:

∢ ب = ∢ ص ، ∢ جـ = ∢ ع

وكذلك $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{س ع}} = \frac{١}{٢}$

الحالة الرابعة:

وهناك حالة خاصة بالمثلثين القائمي الزاوية وهي:

يتشابه المثلثان قائما الزاوية اذا كانت النسبة بين طولي الوترين فيهما تساوي النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيها ، كما في الشكل:

س
وتر
١٥ سم
ع
١٢
ص
أ
وتر
٥ سم
جـ
٤ سم
ب

وبالرموز:

$\frac{\text{الوتر أ جـ}}{\text{الوتر س ع}} = \frac{\text{الضلع ب جـ}}{\text{الضلع ص ع}}$ كون $\frac{٥}{١٥} = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣}$

مثال تطبيقي:

اذا كان طول ظل عمارة الساعة الخامسة بعد الظهر في أحد الأيام ٨ م وطول ظل وليد في نفس الساعة ٤ م، فإذا كان طول وليد ١,٨ م ما ارتفاع العمارة؟

من الشكل المجاور:

المثلثان أ ب جـ ، س ص ع متشابهان

كون زوايا المثلث أ ب جـ تساوي نظائرها من زوايا المثلث س ص ع

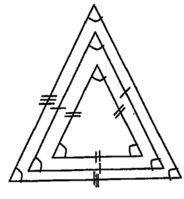
وينتج أن $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} \leftarrow \frac{\text{أ ب}}{١,٨} = \frac{٨}{٤}$

وبالضرب التبادلي: $\frac{\text{أ ب} \times ٤}{٤} = \frac{١,٨ \times ٨}{٤}$

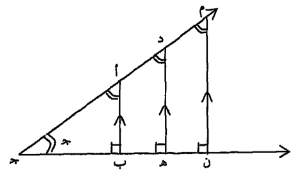
أ ب = ٢ × ١,٨ = ٣,٦ متراً ارتفاع العمارة.

والجدير بالذكر أن جميع المثلثات المتطابقة الأضلاع - متساوية الأضلاع- متشابهة كون زواياها المتناظرة متساوية كما في الشكل:

وبالرموز: المثلث أ ب جـ يشابه المثلث د هـ و يشابه المثلث س ص ع ....الخ



ومن أشهر التطبيقات على تشابه المثلثات هو ايجاد النسب المثلثية Trigonometric Ratios للزاوية الحادة هـ حيث ∠ هـ ∠ ٩٠° ، وهنا بالذات تستخدم المثلثات القائمة الزاوية كما يلي:



الشكل المجاور يمثل زاوية حادة هي ∠جـ فإذا أنزلنا الأعمدة أ ب ، د هـ ، م ن من أحد أضلاعها على الضلع الآخر

كما هو واضح ينتج أن المثلثات القائمة الزاوية أ ب جـ ، د هـ جـ ، م ن جـ متشابهة لتساويها بالزوايا المتناظرة.

فأضلاعها متناسبة كما يلي:

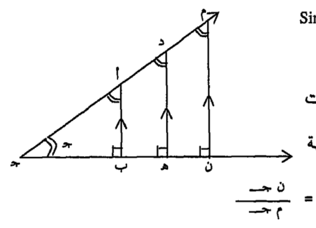
$$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{م ن}}{\text{م جـ}}$$

أي أن النسبة ثابتة لا تتغير

ولما كانت الأضلاع أ ب ، د هـ ، م ن هي أضلاع مقابلة للزاوية جـ في المثلثات المذكورة والأضلاع أ جـ ، د جـ ، م ن هي أوتار هذه المثلثات

فإن : $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية جـ في المثلث القائم الزاوية}}{\text{طول الوتر في المثلث نفسه}}$ = نسبة ثابتة

تسمى هذه النسبة جيب الزاوية Sine



ومن الشكل السابق نفسه وبأسلوب متماثل نستنتج أن المثلثات أ ب جـ ، د هـ جـ ، م ن جـ متشابهة

وينتج أن $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{هـ جـ}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{ن جـ}}{\text{م جـ}}$

ولما كانت الأضلاع ب جـ ، هـ جـ ، ن جـ هي الأضلاع المجاورة للزاوية جـ في المثلثات المذكورة.

والأضلاع أ جـ ، د جـ ، م جـ هي أوتار هذه المثلثات

فإن : (طول الضلع المجاور للزاوية جـ في المثلث القائم الزاوية) / (طول الوتر في المثلث نفسه) = نسبة ثابتة

تسمى هذه النسبة جيب تمام الزاوية Cosine

ومما سبق نستطيع القول بشيء من الايجاز:-

في المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب

تُعرَّف النسبة التالية كما يلي:

المقابل / الوتر = أ ب / أ جـ = جيب الزاوية جـ Sine وتختصر هكذا:

جا جـ

أي أن جا جـ = أ ب / أ جـ

وكذلك المجاور / الوتر = ب جـ / أ جـ = جيب تمام الزاوية جـ Cosine وتختصر هكذا:

جتا جـ

أي أن جتا جـ = ب جـ / أ جـ

فالنسبيين جتا جـ = مجاور / الوتر ، جا جـ = المقابل / الوتر

تسميان النسب المثلثية الأساسية.

وهناك نسب أربع تسمى النسب المثلثية الثانوية كونها تشتق من النسب الأساسية (جتا جـ ، جا جـ) هكذا:

ظا جـ = مقابل / مجاور وتسمى ظل الزاوية جـ Tangent

قا جـ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{مجاور}}$ وتسمى قاطع الزاوية جـ Secant

قتا جـ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{مقابل}}$ وتسمى قاطع تمام الزاوية جـ Lo Secant

ظتا جـ = $\frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}}$ وتسمى ظل تمام الزاوية جـ Lo Tangent

ملخص مفيد للنسب المثلثية هكذا:

جا أ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{الوتر}}$ ، ⟵ قتا أ = $\frac{1}{\text{جا أ}}$ (مقلوب جا أ)

جتا أ = $\frac{\text{مجاور}}{\text{الوتر}}$ ، ⟵ قا أ = $\frac{1}{\text{جتا أ}}$ (مقلوب جتا أ)

ظا أ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$ ، ⟵ ظتا أ = $\frac{1}{\text{ظا أ}}$ (مقلوب ظا أ)

أو ظا أ = $\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}$ ، ⟵ ظتا أ = $\frac{\text{جتا أ}}{\text{جا أ}}$

وباستخدام نظرية فيتاغورس القائلة "هنا":

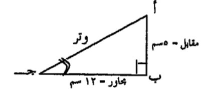
(الوتر)^2 = (المقابل)^2 + (المجاور)^2

نستطيع ايجاد النسب المثلثية بمعرفة أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية كما يلي:

مثال:

اذا كان أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب بحيث أن أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ١٢ سم أوجد النسب المثلثية للزاوية جـ جميعاً.

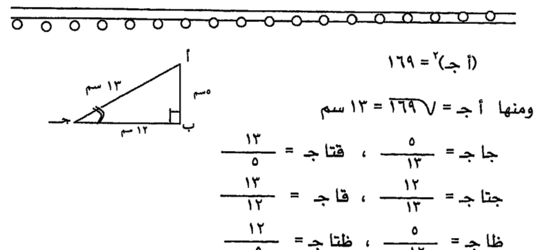
نجد الوتر أ جـ أولاً



وحسب نظرية فيتاغورس:

(أ جـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب جـ)^2 (فيتاغورس)

= (٥)^2 + (١٢)^2 = ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩



(أ جـ)^{٢} = ١٦٩

ومنها أ جـ = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣ سم

جا جـ = $\frac{٥}{١٣}$ ، قتا جـ = $\frac{١٣}{٥}$

جتا جـ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، قا جـ = $\frac{١٣}{١٢}$

ظا جـ = $\frac{٥}{١٢}$ ، ظتا جـ = $\frac{١٢}{٥}$

وهناك زوايا خاصة هي ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° يجب معرفة نسبها المثلثية ومن ثم حفظها كونها تستخدم كثيراً في الرياضيات والعلوم الأخرى كالفيزياء وغيرها.

ايجادها من الرسم: اذا كان أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٢ سم.

مثلث متساوي الأضلاع

ومن الشكل المجاور وبعد التركيز على المثلث أ ب جـ وايجاد أ د من قوانين فيثاغورس كما يلي:

(أ ب)^{٢} = (ب د)^{٢} + (د أ)^{٢}

(٢)^{٢} = (١)^{٢} + (د أ)^{٢}

٤ = ١ + (د أ)^{٢}

(د أ)^{٢} = ٣ ⟵ أ د = $\sqrt{٣}$

ولذلك فإن جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$ ، جتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

وإذا كان أ ب جـ مثلث قائم الزاوية متساوي الساقين كما في الشكل:

وعندما أ ب = ١ سم ، ب جـ = ١ سم

أ جـ = $\sqrt{٢}$ من نظرية فيثاغورس

ولذلك فإن جا ٤٥ = جتا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ويفضل كتابة هذه النسب كما في الجدول التالي:

الزاوية / النسبة	جا	جتا	ظا	قتا	قا	ظتا
٣٠°	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	٢	$\frac{٢}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٣}$
٤٥°	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	١	$\sqrt{٢}$	$\sqrt{٢}$	١
٦٠°	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$	$\frac{٢}{\sqrt{٣}}$	٢	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$

مثال:

× أوجد جا ٤٥° جتا ٤٥°

الحل:

$$\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^٢ + \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^٢ = \frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} = \frac{٤}{٤} = ١$$

× أوجد ظا^٢ ٦٠ قا^٢ ٦٠ = $(\sqrt{٣})^٢ (٢)^٢ = ٣ \times ٤ = ١٢$

هناك علاقات بين النسب المحلية نوردها مع الأمثلة كما يلي:

أولاً: ظا س = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ ،

مثال: ظا ٣٠ = $\frac{\text{جا } ٣٠^\circ}{\text{جتا } ٣٠^\circ} = \frac{\frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

ثانياً: جا س = جتا (٩٠ – س)، (جيب أي زاوية حادة يساوي جيب تمام متممها)

مثال: جا ٣٠° = جتا ($٩٠^\circ - ٣٠^\circ$) = جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

ثالثاً: جتا س = جا (٩٠ –س)، (جيب تمام أي زاوية حادة يساوي جيب متممها)

مثال: جتا ٣٠° = جا (٩٠° - ٣٠°) = جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{}}{٣}$

رابعاً: في هذا السياق سنورد العلاقة بين النسب المثلثية لزاوية حادة ومكملتها المنفرجة، والتفسير سيناقش فيما بعد وفي فصل المثلثات بالذات.

لكل س زاوية حادة

فإن جا س = جا (١٨٠- س) = جا س، (جيب أي زاوية يساوي جيب مكملتها)

مثال: جا ١٢٠° = جا (١٨٠° – ١٢٠°) = جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

وان جتا (١٨٠- س) = - ص س

حيث تمام أي زاوية = سالب جيب تمام مكملتها.

مثال: جتا ١٢٠ = جتا (١٨٠ - ٦٠) = - جتا ٦٠ = - $\frac{١}{٢}$

وان ظا (١٨٠ –س) = - ظا س

ظل أي زاوية يساوي سالب ظل مكملتها.

مثال: ظا ١٢٠° = ظا (١٨٠ - ٦٠) = - ظا ٦٠ = -$\sqrt{٣}$

خامساً: جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١

مثال: جا^{٢} ٤٥ + جتا^{٢} ٤٥ = $(\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢}$ + $(\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ = ١

مثال: جا^{٢} ٣٠° + جتا^{٢} ٣٠ = $(\frac{١}{٢})^{٢}$ + $(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢}$ = $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٣}{٤}$ = ١

مثال: اذا كان جا س = $\frac{٥}{١٣}$ أوجد النسب المثلثية الأخرى.

بما أن جا^{٢} س = جتا^{٢} س = ١

فإن $(\frac{٥}{١٣})^{٢}$ + جتا^{٢} س = ١

ومنه: $جتا^2 س = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \longrightarrow جتا س = \frac{12}{13}$

لذلك $ظا س = \frac{جا س}{جتا س} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$

$قا س = \frac{1}{جتا س} = \frac{1}{\frac{12}{13}} = \frac{13}{12}$

$قتا س = \frac{1}{جا س} = \frac{1}{\frac{5}{13}} = \frac{13}{5}$

$ظتا س = \frac{جتا س}{جا س} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{12}} = \frac{12}{5}$

مثال: اذا كان جا ٧٠° = ٠,٩٠ تقريباً (من الجداول أو الآلة الحاسبة)
أوجد جتا ٢٠°

جتا ٢٠° = جا (٩٠ - ٢٠) = جا ٧٠ = ٠,٩٠

مثال: اذا كان ظا ٤٥° = ١ أوجد ظا ١٣٥°

ظا ١٣٥° = ظا (١٨٠° - ٤٥°) = - ظا ٤٥° = - ١

مثال: اذا كان ص س = ٣ ص س أوجد ظا س حيث س زاوية حادة

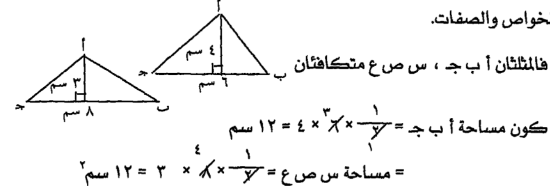
$\frac{جا س}{جتا س} = \frac{3جتا س}{جتا س}$ بالقسمة على جتا س

ظا س = ٣

تكافؤ المثلثات Equibalence of Triangles:

يقال للمثلثين أنهما متكافئان إذا كانا متساويان بالمساحة فقط دون سائر الخواص والصفات.

فالمثلثان أ ب جـ ، س ص ع متكافئان



كون مساحة أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٤ = ١٢ سم

= مساحة س ص ع = $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٣ = ١٢ سم^{٢}

لذا فالمثلثان المتطابقان متكافئان -لأن لهما نفس المساحة- والعكس ليس صواب، لأنه ليس من الضروري أن كل مثلثين متكافئين متطابقان.

مثال:

أ ب جـ مثلث فيه أ د مستقيم متوسط كما في الشكل:

فالمثلثان أ ب د ، أ د جـ متكافئان

كون لهما نفس المساحة، حيث أن

مساحة أ ب د = $\frac{١}{٢}$ ب د × ع

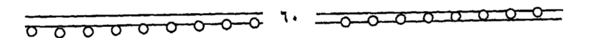
مساحة أ د جـ = $\frac{١}{٢}$ د جـ × ع

وكون أ د مستقيم متوسط فإن ب د = د جـ

ومنها $\frac{١}{٢}$ ب د × ع = $\frac{١}{٢}$ د جـ × ع أي أن المثلثين متكافئان.

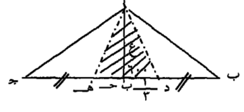
نظرية:

المستقيم المتوسط يقسم المثلث الى مثلثين متكافئين "نتيجة لما جاء بالمثال السابق".



مثال:

اذا كانت مساحة المثلث أ ب جـ = ٦٠٠ سم^{٢} وطول قاعدته ب جـ = ١٢٠سم فإذا قسمت قاعدته بالنقتطين د ، هـ الى ثلاثة أقسام متساوية. احسب مساحة المثلث أ د هـ



مساحة أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ د هـ × ع

= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٣}$ ب جـ × ع

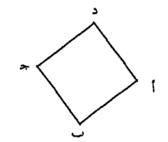
= $\frac{١}{٦}$ × (ب جـ × ع) = $\frac{١}{٦}$ × ب جـ × ع

(وكون مساحة أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × ع)

= $\frac{١}{٣}$ × ($\frac{١}{٢}$ ب جـ × ع) = $\frac{١}{٣}$ مساحة أ ب جـ

= $\frac{١}{٣}$ × ٦٠٠ = ٢٠٠ سم^{٢}

(٣ - ٤) الأشكال الرباعية Quadrilaterals:



ونبدأها بالشكل الرباعي Quadrilateral

والشكل الرباعي هو شكل هندسي

وجزء من مستوى محاط بأربع قطع

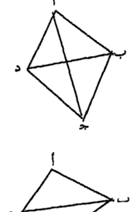
مستقيمة متقاطعة مثنى كما في الشكل.

وبلغة المجموعات فالشكل الرباعي مجموعة من النقط {أ ، ب جـ ، د} غير المستقيمة، أي لا تقع ثلاثة منها على خط مستقيم واحد، حيث:

أ ب ∪ ب جـ ∪ جـ د ∪ د أ = أ ب جـ د

أي هو ناتج اتحاد أربع قطع مستقيمة متقاطعة مثنى.

وبالرموز ▭ أ ب جـ د ويقرأ الشكل الرباعي أ ب جـ د حيث النقط أ، ب، جـ ، د تسمى رؤوسه (عددها أربع فقط) والقطع المستقيمة أ ب، ب جـ ، جـ د، د أ تسمى أضلاعه (عددها أربع أضلاع) والزوايا ∠ أ ، ∠ ب ، ∠ جـ ، ∠ د تسمى زواياه الداخلية (عددها أربع زوايا) والقطعة الواصلة بين كل رأسين غير متتاليين تسمى قطراً.



مثل: أ جـ ، ب د

فللشكل الرباعي قطران فقط

ومجموع قياسات زواياه الداخلية = ٣٦٠°

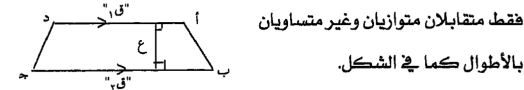
حيث الشكل أ ب جـ د مكون من مثلثين

أو أ ب جـ د يكافئ أ ب جـ ∪ ب جـ د

والجدير بالذكر أن هناك حالات خاصة للشكل الرباعي ينتج عنها أشكالاً رباعية بمسميات مختلفة، ومن هذه الأشكال الرباعية ولكل باسمه الخاص به:

شبه المنحرف Trapezium:

شبه النمحرف شكل رباعي فيه ضلعان فقط متقابلان متوازيان وغير متساويان بالأطوال كما في الشكل.



وبالرموز أ د // ب جـ

والضلعان المتوازيان هما القاعدتان ويرمز لهما بالرمزين $ق_١$ ، $ق_٢$

لذا فإن $ق_١$ // $ق_٢$

والضلعان غير المتوازيين هما الساقان وبالشكل أ ب ، د جـ وأما ارتفاعه فهو البعد بين القاعدتين المتوازيتين ويرمز له بالرمز ع.

مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ × الارتفاع × مجموع القاعدتين

وبالرموز = $\frac{١}{٢}$ ع ($ق_١$ + $ق_٢$) نصف مساحته

مثال:

مساحة شبه المنحرف أ ب جـ د

د ، $ق_١$ = ٨سم ، أ ، ع = ٩سم ، جـ ، ب ، $ق_٢$ =١٢سم

كما في الشكل = ($\frac{١}{٢}$) (٩) (٨ +١٢)

= ($\frac{١}{٢}$) (٩) (٢٠) = ٩٠ $سم^٢$

محيط شبه المنحرف = مجموع أضلاعه

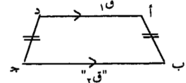
فمحيط شبه المنحرف أ ب جـ د = أ ب + ب جـ + جـ د + د أ

= ١٤ + ١٢ + ١٥ + ٨ = ٤٩ سم.

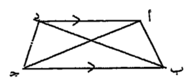
وشبه المنحرف متساوي الساقين:

هو شبه منحرف ساقاه متساويان بالطول كما في الشكل:

أ ب = د جـ



لشبه المنحرف قطران هما:

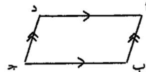


أ جـ ، ب د

لا علاقة بينهما اطلاقاً.

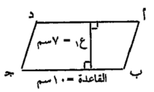
متوازي الأضلاع Parallelogram:

متوازي الأضلاع شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين كما في الشكل:



أ ب // جـ د ، ب جـ // أ د

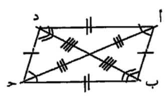
قاعدة متوازي الأضلاع هي أي ضلع من أضلاعه. وأما ارتفاعه فهو العامود النازل على هذه القاعدة كما في الشكل:



مساحة متوازي الأضلاع = طول القاعدة × الارتفاع

= ١٠ × ٧ = ٧٠ سم٢

خواص متوازي الأضلاع بإيجاز شديد:



× كل ضلعين متقابلين متساويان بالطول

أي أ ب = د جـ ، ب جـ = أ د

× كل زاويتين متقابلتين متساويتان بالقياس

أي ∢ أ = ∢ جـ ، ∢ ب = ∢ د

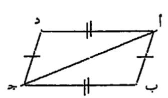
× قطراه ينصف كل منهما الآخر

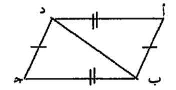
أي أ م = م جـ ، ب م = م د

× القطران يقسمان سطح متوازي الأضلاع الى أربعة مثلثات متكافئة هي:

Δ أ ب م = Δ ب م د = Δ د م جـ = Δ أ م د

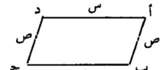
× كل قطر من أقطاره يقسم سطح متوازي الأضلاع الى مثلثين متطابقين ومتكافئين ومتشابهين أيضاً





ولبيان صحة كل من الخصائص السابقة استخدم تطابق المثلثين.

محيط متوازي الأضلاع:

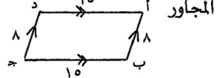


= ضعف مجموع طولي ضلعين متجاورين فيه

وبالرموز: المحيط = ٢(س + ص) كما في الشكل:

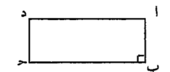
فمحيط متوازي الضلاع المذكور في الشكل المجاور

= ٢ (٨ + ١٥) = ٢(٢٣) = ٤٦ سم.



المستطيل Rectange:

المستطيل: متوازي أضلاع زواياه قوائم



قاعدة المستطيل: أحد أضلاعه

ارتفاع المستطيل: الضلع الآخر العامودي

عليه كما في الشكل

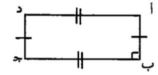
أو العكس صواب.

مساحة المستطيل= القاعدة × الارتفاع ويمكن أن يقال:

مساحة المستطيل= الطول × العرض = ٨ × ١٣ = ١٠٤ سم^{٢} كما في الشكل.

خواص المستطيل بإيجاز شديد:

× كل ضلعين متقابلين متساويين بالطول باعتباره متوازي أضلاع.



× قياس جميع زوايا المستطيل قوائم.

× قطراه ينصف كل منهما الآخر ومتساويان بالطول.

أي أن أ م = ب م = م جـ = م د

× كل من قطريه يقسم سطحه الى مثلثين متطابقين.

أما قطراه فيقسمان سطحه الى أربعة مثلثات متكافئة.

أ م د يكافئ د م جـ يكافئ جـ م ب يكافئ ب م أ

محيط المستطيل = ضعف مجموع طولي ضلعين متجاورين فيه.

= ٢ (س + ص)

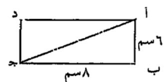


مساحته = حاصل ضرب القاعدة × الارتفاع أو الطول × العرض

= س × ص = س ص

أما قطره = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$ (نظرية فيثاغورس)

مثال:



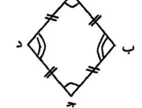
المستطيل كما في الشكل:

مساحته = ٦ × ٨ = ٤٨ سم^2

محيطه = ٢ (٦ + ٨) = ٢ (١٤) = ٢٨

قطره أ جـ = $\sqrt{(\text{٦})^2 + (\text{٨})^2}$ = $\sqrt{\text{٣٦} + \text{٦٤}}$ = $\sqrt{\text{١٠٠}}$ = ٦٠ سم.

المعين Rhombus:



المعين: متوازي أضلاع أضلاعه متساوية.

خواصه بإيجاد شديد:

× كل زاويتين متقابلتين متساويتان بالقياس

× قطراه متعامدان وينصف كل منهما الآخر

أي أن م أ = م جـ

م ب = م د

وكذلك أ جـ $\perp$ (يعامد) ب د

× كل من قطريه يقسم سطح المعين الى مثلثين متطابقين أي أن:

المثلثان أ ب د ، جـ ب د متطابقان

وكذلك المثلثان أ ب جـ ، أ د جـ متطابقان

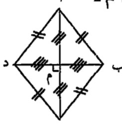
× وكل من قطريه ينصف الزاويتين المتقابلتين.

أي أن أ جـ ينصف ∢ أ ،∢ جـ

وكذلك ب د ينصف ∢ب ،∢ د

× قطراه معاً يقسمان سطح المعين الى أربعة مثلثات متكافئة أي أن:

المثلث أ ب م يكافئ ب جـ د يكافئ جـ د م يكافئ أ م د

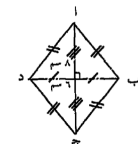


محيط المعين = ٤ أمثال طول ضلعه

فمحيط أ ب جـ د = ٤ × ٥ = ٢٠ سم

ومساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ × القطر الأول × القطر الثاني

فإذا كان طول أ جـ = ٨ سم



وطول ب د = ٦ سم

مساحة أ ب جـ د = $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٦ = ٢٤ سم^{٢}

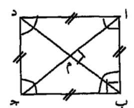
المربع Square:

المربع: متوازي أضلاع أضلاعه متساوية بالطول، وقياس زواياه قوائم.

وله من الخواص:

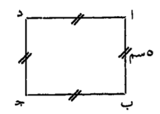
× قطراه متساويان ومتعامدان وينصف

كل منهما الآخر.



أي أن م أ = م ب = م جـ = م د وينصفان زواياه.

× كل من قطريه يقسمان سطحه الى أربعة مثلثات متطابقة (ومتكافئة).



محيط المربع = ٤ أمثال طول ضلعه

محيط المربع أ ب جـ د = ٥ × ٤ = ٢٠سم

ومساحته = (الضلع)^{٢} = (٥)^{٢} = ٢٥ سم^{٢}

وطول قطره = $\sqrt{(٥)^{٢} + (٥)^{٢}}$ = $\sqrt{٢٥ + ٢٥}$ = $\sqrt{٥٠}$ = ٥$\sqrt{٢}$ سم (فيتاغورس)

والجدير بالذكر أن هناك خواص مشتركة بين الأشكال الرباعية كما يلي:

× القطران متعامدان: المعين ، المربع

× القطران متساويان بالطول: المستطيل ، المربع

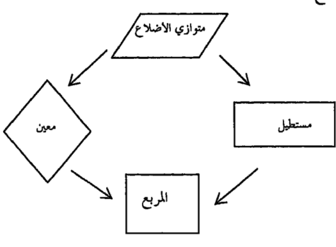
× القطران منصفان الزوايا: المعين ، المربع

× الأضلاع متساوية بالطول: المعين ، المربع

× الزوايا قوائم: المستطيل ، المربع

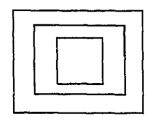
وأخيراً فإن متوازي الأضلاع والمعين والمربع من عائلة واحدة تسمى عائلة متوازيات الأضلاع، وترتب حسب الخواص كما في الشكل:

متوازيات الأضلاع:



ولا ننسى بعض الملحوظات:

* جميع المربعات متشابهة مهما اختلفت أطوال أضلاعها بلا قيد ولا شرط كما في الشكل:



* يمكن أن يتكافأ مثلث مع مربع أو مع مستطيل أو مع معين، ولكنه لا يتشابه كما لا يتطابق معه اطلاقاً كون التكافؤ التساوي بالمساحة فقط كما في الشكل:

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ١٠ = ٢٥ سم^{٢}

مساحة المربع = ٥ × ٥ = ٢٥ سم^{٢}

١٠سم   ٥ سم

مثلث   مربع

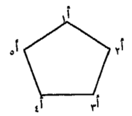
مثال محلول:

أي الجمل التالية صواب (نعم) وأيها خطأ (لا)؟

* كل من المعين والمستطيل والمربع يكون متوازي أضلاع "نعم"
* المربع مستطيل أضلاعه متساوية "نعم"
* المربع معين قياس احدى زواياه قائمة "نعم"
* قطرا المستطيل متعامدان " لا "
* قطرا المعين متساويان " لا "

(٣- ٥) المضلعات Polygons:

المضلع: سطح هندسي مستوٍ محدود بعدد من القطع المستقيمة



وبلغة المجموعات:

اذا كانت المجموعة س = {$أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، $أ_{٣}$ ، ٠٠٠ ، $أ_{ن}$}

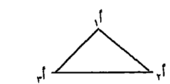
فإن المجموعة الجزئية {$أ_{١}$ $أ_{٢}$ $أ_{٣}$ ٠٠٠ $أ_{ن}$ $أ_{١}$} تسمى مضلع

وتسمى النقط $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، $أ_{٣}$ ، ٠٠٠ ، $أ_{ن}$ رؤوس المضلع

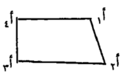
والقطع المستقيمة $أ_{١}أ_{٢}$ ، $أ_{٢}أ_{٣}$ ، $أ_{٣}أ_{٤}$ ، ٠٠٠ ، $أ_{ن}أ_{١}$ أضلاع المضلع

فالمضلع قطعة منكسرة تنطبق نهاياتها.

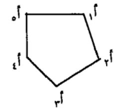
فإذا كان عدد رؤوس المضلع ثلاثة فهو مثلث Triangle $أ_{١}أ_{٢}أ_{٣}$



وأذا كان عدد رؤوسه أربعة فهو شكل رباعي Quadrilateral $أ_{١}أ_{٢}أ_{٣}أ_{٤}$



وإذا كان عددد رؤوسه خمسة فهو شكل خماسي Pentagon $أ_{١}أ_{٢}أ_{٣}أ_{٤}أ_{٥}$

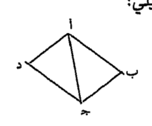


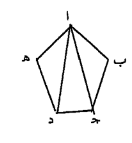
واذا كان عدد رؤوسه ستة وكانت أضلاعه متساوية سمي مُسدس Hexagon.

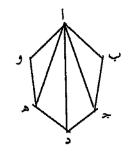
وهكذا ....

× مجموع قياسات زوايا المضلع الداخلة تعتمد على عدد أضلاعه.

ولإيجاد هذا المجموع نقسم المضلع الى مثلثات وذلك بتوصيل أقطاره كما يلي:







الشكل الرباعي= مثلثان الشكل الخماسي= ٣ مثلثات الشكل السداسي= ٤ مثلثات

ونلخص الطريقة "ايجاد مجموع قياسات زوايا المضلع" بالجدول البسيط التالي:

اسم المضلع	عدد أضلاعه	عدد المثلثات	مجموع قياسات زوايا المضلع بالدرجات
رباعي	٤	٤ -٢ =٢	$٢ \times ١٨٠^\circ = ٣٦٠^\circ$
خماسي	٥	٥ -٢ =٣	$٣ \times ١٨٠^\circ = ٥٤٠^\circ$
سداسي	٦	٦ -٢ =٤	$٤ \times ١٨٠^\circ = ٧٢٠^\circ$
⋮	⋮	⋮	⋮
ن من الأضلاع	ن	ن – ٢	(ن –٢) × ١٨٠°

أي أن مجموع قياسات زوايا المضلع الذي عدد أضلاعه ن ضلع، لكل ن عدد طبيعي ≥ ٢ هو:

(ن – ٢) × ١٨٠° بالدرجات = (ن – ٢) ×٢ بالقوائم إن شئت

= (٢ن – ٤) قائمة

وإذا كان المضلع (أضلاعه متساوية بالطول وزواياه متساوية بالقياس).

فإن قياس كل زاوية من زواياه = $\frac{\text{مجموع قياسات زواياه}}{\text{عدد أضلاعه = عدد زواياه}}$

أي أن قياس كل زاوية من زوايا = $\frac{(\text{ن} - ٢) \times ١٨٠^\circ}{\text{ن}}$

المضلع ذي ن ضلع

مثال محلول:

ما مجموع قياسات زوايا المضلع الذي له ١١ ضلع بالدرجات والقوائم؟

مجموع قياسات زوايا المضلع بالدرجات = (ن - ٢) × ١٨٠°

= (١١ - ٢) × ١٨٠°

= ٩ × ١٨٠° = ١٦٢٠°

(كون ١٨ قائمة = ١٨ × ٩٠ = ١٦٢٠°) للتحقق.

مثال (٢)

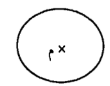
ما قياس زاوية المضلع الخماسي المنتظم (مخمس)؟

قياس كل زاوية = مجموع قياسات زواياه / عدد أضلاعه

= (٥ - ٢) × ١٨٠ / ٥

= ٣ × ~~١٨٠~~ ٣٦ / ~~٥~~ ١ = ١٠٨°

(٣- ٦) الدوائر Circles:



تعد الدوائر من أكثر الأشكال الهندسية انتشاراً واستخداماً في الحياة العملية.

والدائرة: مجموعة كل النقط في المستوى والتي تبعد بعداً ثابتاً عن نقطة معلومة.



هذا البعد الثابت يسمى نصف قطر الدائرة ويرمز له بالرمز نق.

والنقطة المعلومة تسمى مركز الدائرة ويرمز لها بأحد حروف الهجاء مثل م ، ن ، ٠٠٠

وتر الدائرة: قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين على الدائرة مثل أ ب بالشكل.

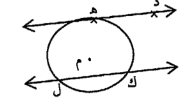
قطر الدائرة: اذا مرَّ الوتر بالمركز تسمى قطراً مثل جـ د بالشكل.

زاوية مركزية: هي الزاوية التي يقع رأسها فيمركز الدائرة، وضلعاها نصفا قطرين مثل ∠ هـ م جـ بالشكل.

زاوية محيطية: هي الزاوية التي يقع رأسها على الدائرة وضلعاها وترين مثل ∠س ص ع بالشكل.

محيط الدائرة: هو الخط المنحني المقفل المحيط بسطح الدائرة من جميع الجهات وتسمى الدائرة باسمه.

قوس الدائرة: هو خط منحني وجزء من الدائرة مثل جـ بالشكل ويرمز له بالرمز $\overline{\text{جـ هـ}}$.



قاطع الدائرة: هو مستقيم يقطع الدائرة في نقطتين مثل المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ك ل}}$ بالشكل.

.مماس الدائرة: هو مستقيم يقطع الدائرة في نقطة واحدة. مثل المستقيم $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ بالشكل.

× النسبة التقريبية أو الثابتة: وهي النسبة بين محيط الدائرة وطول قطرها ويرمز لها بالرمز π (باي) كحرف من حروف الهجاء الاغريقية.

أي أن π = $\frac{\text{طول محيط الدائرة}}{\text{طول القطر}}$ = $\frac{٢٢}{٧}$ = ٣,١٤ تقريباً.

×ومنها وبالضرب التبادلي:

محيط الدائرة = π × خط الدائرة = π × ٢نق = ٢ π نق وحدة طول.

× أما مساحة سطح الدائرة = نق^{٢} π

مثال:

ما محيط ومساحة دائرة نصف قطرها ١٤ سم الحيز π = $\frac{٢٢}{٧}$ ؟

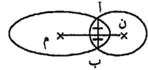
المحيط = ٢ نق π = ٢ × ١٤ × $\frac{٢٢}{٧}$ = ٨٨ سم.

المساحة = نق^{٢} π = ١٤ × ١٤ × $\frac{٢٢}{٧}$ = ٢٨ × ٢٢ = ٦١٦ سم^{٢}

نظرية:

خط المركزين بين دائرتين متقاطعتين يكون عامودياً على الوتر وينصفه كما في الشكل:

م ن ⊥ أ ب وكذلك أ د = د ب.



ملحوظات لا بدّ منها الآن:

* المسافة بين نقطتين هي طول القطعة الواصلة بينهما.

* أقصر مسافة بين نقطة ومستقيم تساوي طول العامود النازل من تلك النقطة الى ذلك المستقيم.

* في المثلث القائم الزاوية (أ، ب، جـ)، $(أ جـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب جـ)^2$ نظرية فيتاغورس.

سنناقش الدائرة من حيث:

أوتار الدائرة Chords:

نظريات:

* العامود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها ينصفه، والعكس صواب.

* أي أن المستقيم الواصل بين مركز الدائرة وضعف أي وتر فيها غير مار بالمركز يكون عاموداً على الوتر.

* العامود المقام من منتصف وتر في دائرة يمر في مركزها.

يمكن الاستعانة بتطبيق المثلثات لبيان صحة النظريات!!

مثال محلول:

دائرة نصف قطرها ١٠ سم رسم فيها وتر طوله ١٦ سم احسب بعده عن المركز.

باستخدام النظريات فإن م د هو العامود النازل من المركز على الوتر وينصفه وهو بعد الوتر عن المركز.



(م ب)^{٢} = (م د)^{٢} + (د ب)^{٢} نظرية فيتاغورس

(١٠)^{٢} = (م د)^{٢} + (٨)^{٢}

١٠٠ = (م د)^{٢} + ٦٤

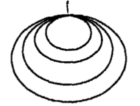
(م د)^{٢} = ١٠٠ – ٦٤ = ٣٦

م د = $\sqrt{٣٦}$ = ٦سم بعد الوتر عن المركز.

مثال محلول:

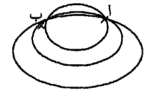
× كم دائرة يمكنك أن ترسم بحيث تمر كل منها بنقطتين معلومتين مثل أ ؟

الجواب: عدة دوائر والعدد لا نهائي.

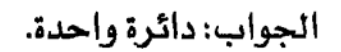


× كم دائرة يمكنك أن ترسم بحيث تمر كل منها بنقطة معلومة مثل (أ، ب)؟

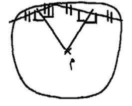
الجواب: عدد لا نهائي.



× كم دائرة يمكنك أن ترسم بحيث تمر كل منها بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة؟

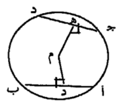


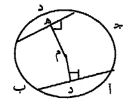
الجواب: دائرة واحدة.



ويتعين مركزها من تقاطع العامود المنصف للوتر الأول مع العامود المنصف للوتر الثاني كما في الشكل.

حقيقة هندسة: اذا تساوى طولا وترين في دائرة كانا على بعدين متساويين من المركز واذا اختلفا بالطول كان أقربهما الى المركز هو الأكبر كما في الشكل:



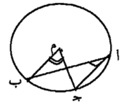


وبالرموز: أ ب = جـ د ⟸ م د = م هـ   أ ب > جـ د ⟸ أ د < م هـ

نظريات:

زوايا الدائرة Angles:

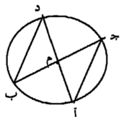
* قياس الزاوية المركزية يساوي ضعف قياس الزاوية المحيطية المرسومة فيها على القوس نفسه كما في الشكل؟



أي ∢ أ م ب = ضعف ∢ أ جـ ب

حيث أ ب قوس مشترك لهما.

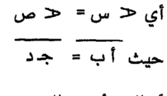
* الزاويتان المحيطتان المرسومتان على قوس واحد في الدائرة لهما نفس القياس، كما في الشكل:



أي ∢ أ جـ ب = ∢ أ د ب

حيث أ ب قوس مشترك لهما.

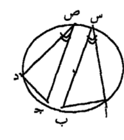
وبصورة عامة الزوايا المحيطية المرسومة على أوتار متطابقة أو أقواس متطابقة تكون متطابقة (أي متساوية بالقياس) كما في الشكل:

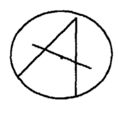


أي ∢ س = ∢ ص

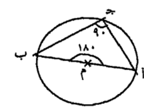
حيث أ ب = جـ د

أو الوتر أ ب = الوتر جـ د





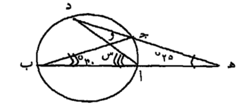
× قياس الزاوية المحيطية المقابلة لقطر الدائرة (أكبر وتر فيها) يساوي °٩٠ كما في الشكل:



أي ∢ أ جـ ب = °٩٠

كون ∢ أ جـ ب = نصف ∢ أ م ب المركزية والمستقيمة (°١٨٠)

مثال محلول:



من الشكل المجاور أوجد قياس

∢ د أ ب ← س°

∢ د أ ب = ∢ هـ + ∢ د (خارجة للمثلث أ هـ د)

= °٢٥ + ∢ د

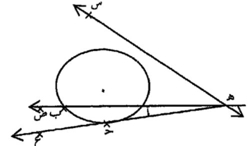
لكن ∢ د = ∢ ب = °٢٠ محيطتان مرسومتان على القوس أ جـ

∢ د أ ب = °٢٥ + °٢٠ = °٤٥.

× **مماساتها** Tangents:

من المعلوم في الرياضيات أن هناك ثلاثة أوضاع للمستقيم بالنسبة للدائرة كما في الشكل:

الأول: هـ س لا علاقة له بالدائرة اطلاقاً.

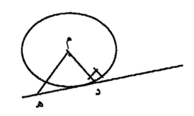


الثاني: هـ ص ويقطع الدائرة في نقطتين هما أ ، ب يسمى القاطع وتسمى القطعة المستقيمة أ ب وتر الدائرة

الثالث: هـ ع ويقطع الدائرة في نقطة واحدة هي جـ يسمى المماس وتسمى هذه النقطة نقطة التماس.

نظريات:

× مماس الدائرة في نقطة ما عليها يكون عامودياً على نصف القطر المار بنقطة التماس كما في الشكل:

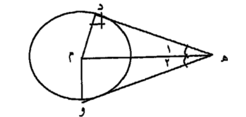


كون م د هو أقصر بعد بين مركز الدائرة والمماس فلا بد أن يكون عاموداً كون العامود هو أقصر بعد بين نقطة ومستقيم.

× والعكس صواب: أي أن المستقيم الذي يعامد نصف قطر الدائرة عند نهايته على الدائرة يكون مماساً للدائرة.

× إذا رسم مماسان لدائرة من نقطة خارجها كما في الشكل.

فإن:



المماسين هـ د ، هـ و متساويان.

أي أن هـ د = هـ و

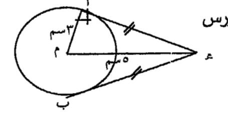
والخط هـ م ينصف الزاوية ∢ هـ

أي أن ∢١ = ∢٢

وهذا واضح من تطابق المثلثين م د هـ ، م و هـ.

مثال محلول:

من الشكل احسب طول المماسين أ هـ ، ب هـ



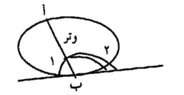
بما أن $(م\,هـ)^2 = (أ\,هـ)^2 + (أ\,م)^2$ فيثاغورس

فإن $(٥)^2 = (أ\,هـ)^2 + (٣)^2$

$٢٥ = (أ\,هـ)^2 + ٩$

$(أ\,هـ)^2 = ٢٥ - ٩ = ١٦ \leftarrow أ\,هـ = \sqrt{١٦} = ٤$ ومنه أ هـ = ب هـ = ٤ سم

بما أن الزاوية المماسية هي الزاوية المحصورة بين مماس ووتر في الدائرة، ورأسها نقطة التماس كما في الشكل:

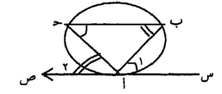


فهي اما الزاوية ∢١

أو الزاوية ∢٢

فإن: "**نظرية (الزاويتان المماسية والوتر)**:

قياس الزاوية المماسية المحصورة بين مماس الدائرة وأي مركز فيها مار بنقطة التماس في احدى جهتي الوتر يساوي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على هذا الوتر ومن الجهة الأخرى كما في الشكل:



أي أن ∢١ = ∢جـ

وكذلك ∢٢ = ∢ ب

مثال محلول:

من الشكل المجاور

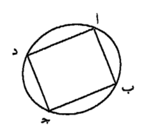
أوجد قياس ∢ أ ب جـ

∢ ١ = ١٨٠° - ١٥٠° = ٣٠°   (على خط مستقيم)

لكن ∢ ١ = ∢ ب   (مماسية وترية)

ومنها ∢ أ ب جـ = ٣٠°

والآن سأناقش خصائص الشكل الرباعي الدائري وهو الشكل الذي تقع رؤوسه على الدائرة كما في الشكل:



نظرية مجموع قياسي كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الدائري يساوي ١٨٠°

وبالرموز ∢ أ + ∢ جـ = ١٨٠°

وكذلك ∢ د + ∢ ب = ١٨٠°

والعكس صواب، أي:

اذا كان مجموع قياس زاويتين متقابلتين في شكل رباعي يساوي ١٨٠° ، كان هذا الشكل رباعياً دائرياً ،

وكأن الشرط الوحيد لكون أ ب جـ د دائري هو:

∢ أ + ∢ جـ = ١٨٠° فقط أو ∢ ب + ∢ د = ١٨٠° فقط

مثال:

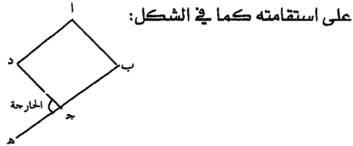
هل يمكن رسم شكل رباعي دائري تكون قياسات زواياه ٦٠° ، ٨٠° ، ١١٦° ، ١٠١°.

ليكون الشكل الرباعي شكلاً رباعياً دائرياً يجب أن يكون مجموع قياسات زاويتين فيه يساوي ١٨٠°

ولأنه لا توجد زاويتان مجموع قياسهما ١٨٠°

فالشكل الرباعي ليس شكلاً رباعياً دائرياً.

والزاوية الخارجة للشكل الرباعي هي الزاوية الناشئة عن حد أحد أضلاعه على استقامته كما في الشكل:



نظرية:

قياس الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي الدائري يساوي قياس الزاوية المقابلة لمجاورتها، كما في الشكل:

وبالرموز الخارجة = ∡جـ

كون الخارجة + ∡١ = ١٨٠°   (على خط المستقيم)

وكذلك ∡١ + ∡جـ = ١٨٠° (شكل رباعي دائري)

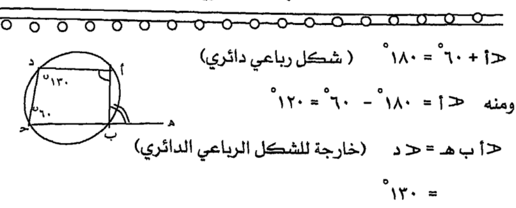
ومنه الخارجة + ∡١ = ∡١ + ∡جـ

- ∡١ - ∡١

الخارجة = ∡ جـ   كما هو مطلوب

مثال محلول:

أوجد قياس كل من ∡ب أ د ، ∡أ ب هـ



∢أ + ٦٠ ْ = ١٨٠ ْ (شكل رباعي دائري)

ومنه ∢أ = ١٨٠ ْ - ٦٠ ْ = ١٢٠ ْ

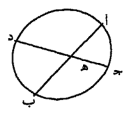
∢أ ب هـ = ∢د (خارجة للشكل الرباعي الدائري)

= ١٣٠ ْ

والآن لا بد من ربط القاطع بالمماس بعد التعريج على الأوتار مرة أخرى كما في النظريتين التاليتين:

* نظريةالأوتار المتقاطعة في نقطة داخل الدائرة وخارجها كما في الشكلين التاليين.

اذا تقاطع وتران داخل دائرة فإن مساحة المستطيل الذي بعداه جزءا الوتر الأول تساوي مساحة المستطيل الذي بعداه جزءا الوتر الثاني كما في الشكل.

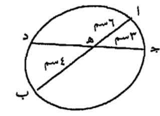


وبالرموز أ هـ . هـ ب = جـ هـ . هـ د

ولبيان صحة النظرية استخدم المثلثات المتشابهة.

مثال محلول:

ما طول هـ د

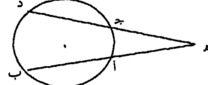


لأن أ هـ . هـ ب = جـ هـ . هـ د

فإن ٦ × ٤ = ٣ × هـ د

ومنها هـ د = $\frac{\cancel{6}^{2} \times 4}{\cancel{3}_{1}}$ = ٨ سم.

وإذا تقاطع الوتران خارج الدائرة كما في الشكل:



فإن ب هـ . هـ أ = د هـ . هـ جـ

مثال:

من الشكل المجاور:

ما طول د جـ ← س سم

لأن أ هـ . هـ ب = جـ هـ . هـ د

فإن ٨ × ٦ = (س + ٤) (٤)

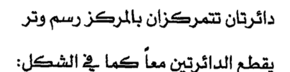
ومنه ٤٨ = ٤ س + ١٦

- ١٦ - ١٦

٣٢ = ٤ س

س = $\frac{٣٢}{٤}$ = ٨سم

مثال محلول على الدوائر:



دائرتان تتمركزان بالمركز رسم وتر

يقطع الدائرتين معاً كما في الشكل:

بين أن أ ب = جـ د

م د ⊥ على أ د ينصفه

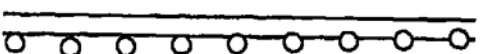
∴ أ س = س د بالدائرة الكبرى

ب س = س جـ بالدائرة الصغرى

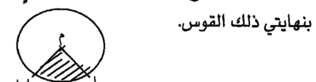
طرفا أ س – ب س = س د – س جـ

أي أن أ ب = جـ د كما هو مطلوب.

وهناك أجزاء من سطح الدائرة جديرة بالدراسة والمناقشة مثل:



القطاع الدائري: هو جزء من سطح دائرة محصور بين قوسٍ ونصفي قطرين مارين بنهايتي ذلك القوس.



ونصف قطري الدائرة يقسمانها الى قطاعين الأكبر والأصغر كما في الشكل. وتسمى الزاوية المحصورة بين نصفي القطرين والتي تقابل قوس القطاع زاوية القطاع.



ولإيجاد مساحة القطاع هناك طريقان:

الأولى: مساحة القطاع الذي زاويته هـ مقاسة بالراديان:

مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ نق^2 هـ حيث ∠ هـ مقاسة بالراديان.

فمساحة القطاع الدائري المرسوم في دائرة نصف قطرها ١٠سم وزاويته المركزية ٢,٥ راديان هي:

المساحة = $\frac{1}{2} \times (10)^2 \times 2.5$

= $\frac{1}{2} \times 100 \times 2.5 = 125$ سم^2

والثانية: وهناك علاقة بين مساحة القطاع الذي زاويته مقاسة بالدرجات ومساحة الدائرة المرسوم فيها كما يلي:

$\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{\text{∠ هـ}}{360}$ حيث ∠ هـ مقاسة بالدرجات.

فمساحة القطاع المرسوم في دائرة نصف قطرها ٢٠ سم وزاويته المركزية ٦٠° هي:

$\frac{\text{مساحة القطاع}}{\pi \text{ نق}^2} = \frac{60^\circ}{360^\circ}$

فمساحة القطاع = $\frac{60^\circ \times \text{نق}^2 \pi}{360^\circ} = \frac{\pi \times 20 \times 20 \times 60}{360}$

= $\frac{200}{3}\pi = \frac{200 \times 3.14}{3} = 209$ سم^2 تقريباً.

مثل القطعة الدائرية:

القطعة الدائرية جزء من سطح دائرة محصورة بين قوسٍ ووتر مار بنهايتي ذلك القوس. كما في الشكل.

ووتر الدائرة يقسمها الى قطعتين صغيرة وكبيرة

ومن الشكل مساحة القطعة المظللة = مساحة القطاع – مساحة المثلث أ م ب

$$= \frac{1}{2}\ \text{نق}^2\ \text{هـ} - \frac{1}{2}\ \text{نق}^2\ \text{جا هـ}$$

$$= \frac{1}{2}\ \text{نق}^2\ (\text{هـ} - \text{جا هـ})$$

حيث هـ مقاسة بالراديان

فمساحة القطعة الدائرية المرسومة في دائرة نصف قطرها ٤ سم وزاويتها المركزية (نصف زاوية القطاع المشترك معها بالقوس) تساوي $\frac{\pi}{3}$ هي:

$$\text{مساحة القطعة الدائرية} = \frac{1}{2}\ \text{نق}^2\ (\text{هـ} - \text{جا هـ})$$

$$= \frac{1}{2} \times 16\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \left\{\left(\text{جا}\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{من النسب المثلثية}\right\}$$

$$= 8\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8\left(\frac{22}{21} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \left\{\pi = \frac{22}{21}\right\}$$

$$= 8\left(\frac{22 \times 2 - \sqrt{3} \times 21}{2 \times 21}\right) = \not{8}^{4}\left(\frac{44 - 21\sqrt{3}}{\not{42}_{21}}\right)$$

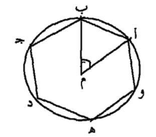
$$= \frac{176}{2} - \frac{84\sqrt{3}}{2}\ \text{سم}^2$$

ومن التطبيقات العملية على الدوائر رسم المضلعات المنتظمة داخلها باستخدام المسطرة والفرجار والمنقلة فقط:

لرسم شكل سداسي منتظم أي متساوي الأضلاع من حيث الطول ومتساوي الزوايا من حيث القياس يسمى المسدس Hexagon.

نقوم بما يلي من الخطوات:

× نرسم دائرة بأي نصف قطر بواسطة الفرجار.



× نرسم زاوية مركزية قياسها

$$= \frac{\text{قياس الدورة الكاملة بالدرجات}}{\text{عدد أضلاع المسدس}}$$

$$= \frac{٣٦٠}{٦} = ٦٠^\circ$$

كما في الشكل ∠أ م ب = ٦٠°

ثم بواسطة الفرجار نأخذ البعد أ ب ونجزئ محيط الدائرة هكذا كما في الشكل ثم نصل بالمسطرة أ ب ، ب جـ ، جـ د ، د هـ ، هـ و ، و أ فيتكون المسدس أ ب جـ د هـ و داخل الدائرة في مركزها م.

وعلى نفس المنوال بالنسبة لبقية المضلعات.

وهنا نستعرض فقط قياس الزاوية المركزية لبعض المضلعات المنتظمة والتي نريد رسمها داخل دائرة.

قياس الزاوية المركزية للمخمس Pontagon = $\frac{٣٦٠}{٥} = ٧٢^\circ$

قياس الزاوية المركزية للمربع Square = $\frac{٣٦٠}{٤} = ٩٠^\circ$

قياس الزاوية للمثمن = $\frac{٣٦٠}{٨} = ٤٥^\circ$

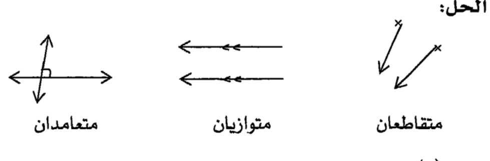
وهكذا..........

تمارين محلولة على الهندسة المستوية:

مثال (١):

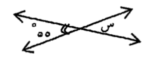
صف المستقيمات من حيث التوازي، التقاطع، التعامد، كما في الأشكال التالية:

الحل:



مثال (٢):

ما قياس كل من الزوايا المشار اليها بالمتغير س مع ذكر السبب؟



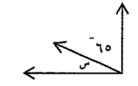
الحل:

∠س = ٥٥° (تقابل بالرأس)

∠س = ١٨٠° - ٦٧° = ١١٣°

(متجاورتان على خط مستقيم)

(أو متكاملتان)

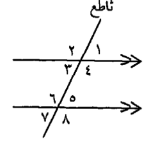


س = ٩٠° - ٦٥° = ٢٥° (متعامدتان)

مثال (٣):

اذكر السبب في كل مساواة كما في الشكل:

السبب:



∢أ = ∢٢ (تقابل بالرأس)

∢١ = ∢٥ (تناظر)

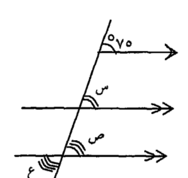
∢٣ = ∢٥ (تبادل)

∢٣ + ∢٦ = ١٨٠° (تحالف)

مثال (٤):

ما قيم س ، ص ، ع بالدرجات؟

فسر اجابتك.



الحل:

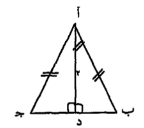
س = ٧٥° (تناظر)

ص = ٧٥° (تناظر)

ع = ص = س = ٧٥° تقابل بالرأس

مثال (٥):

احسب زوايا المثلث (∢أ ،∢ب ،∢جـ)



من انطباق المثلثين أ ب د ، أ د جـ بوتر وضلع وقائمة

ينتج أن أ د منصف للزاوية ∢أ

∴ ∢أ = ٢ (٢٥°) = ٥٠°

$\angle$ب + $\angle$جـ = ١٨٠° - ٥٠° = ١٣٠° (زوايا مثلثة)

∴ $\angle$ ب = $\frac{١٣٠°}{٢}$ = ٦٥° = $\angle$ جـ = ٦٥°

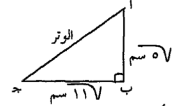
وبما أن $\angle$ ب = $\angle$ جـ متساوي الساقين

فزوايا المثلث $\angle$أ = ٥٠°

$\angle$ب = ٦٥°

$\angle$جـ = ٦٥°

مثال (٦):



احسب طول أ جـ في المثلث القائم الزاوية

أ ب جـ كما في الشكل.

(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} (نظرية فيثاغورس)

(أ جـ)^{٢} = $(\sqrt{٥})^{٢}$ + $(\sqrt{١١})^{٢}$

= ٥ + ١١ = ١٦

∴ أ جـ = $\sqrt{١٦}$ = ٤ سم

مثال (٧):

هل المثلث الذي أطوال أضلاعه ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ سم قائم الزاوية؟

الجواب:

بعد حساب مربعات كل من:

(١٥)^{٢} = ٢٢٥

(٢٠)^{٢} = ٤٠٠

(٢٥)^{٢} = ٦٢٥

بما أن $625 = 225 + 400$

أي $(25)^2 = (15)^2 + (20)^2$

∴ المثلث قائم الزاوية كما في الشكل.

مثال (٨):

سار شخص مسافة ٢ كم شمالاً ثم ٤ كم شرقاً ثم ٣ كم شمالاً وأخيراً ٢ كم شرقاً. ما بعد الشخص الآن عن نقطة الانطلاق؟

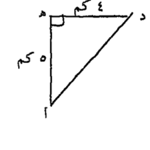
الحل:

بما أنه سار حسب المخطط التالي:

المطلوب: ايجاد طول أ د

الحل:

نكمل المثلث القائم الزاوية أ هـ د فيصبح كما يلي:



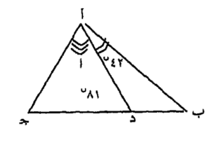
$(أ\ د)^2 = (د\ هـ)^2 + (أ\ هـ)^2$

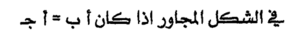
$= (٤كم)^2 + (٥كم)^2$

$= ١٦ + ٢٥ = ٤١$

أ د $= \sqrt{٤١} = ٦.٤$ كم.

مثال (٩):





في الشكل المجاور اذا كان أ ب = أ جـ

احسب قياسات الزاوية ∠ ١

بما أن ٨١° = ٤٢° + ∢ب (خارجة للمثلث أ ب د)

∴ ٨١° = ٤٢° + ∢ب

- ٤٢° - ٤٢°

٣٩° = ∢ ب

ومنها ∢جـ = ٣٩

∴ ∢ أ = ١٨٠° - (٣٩ + ٣٩) = ١٨٠ — ٧٨ = ١٠٢° (زوايا مثلث)

وبما أن ∢١ = ∢أ — ٤٢° = ١٠٢° — ٤٢° = ٦٠°

∴ ∢ ١ = ٦٠°

مثال (١٠):

أي من التالية يمكن أن تكوّن أطوال أضلاع مثلث:

(i) ٩ سم ، ١١ سم ، ٢٥ سم

(ii) ٢٠ سم ، ١٢ سم ، ٣٢ سم

(iii) ٩ سم ، ٤٠ سم ، ٤١ سم

لتكون الأطول أضلاع مثلث يجب أن تحقق العبارة التالية:

"مجموع ضلعين أكبر من ضلع"

بما أن:

(i) أي طولين من الأضلاع ٩ ، ١١ ، ٢٥ ليست أكبر من طول الضلع الثالث

مثل ٩ + ١١ = ٢٠ ≯ ٢٥ (بل أصغر)
ليس أكبر

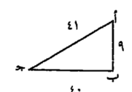
∴ لا تصلح الأطوال ٩ ، ١١ ، ٢٥ لتكون مثلث

(ii) وبما أن ٢٠ + ١٢ $\not>$ ٣٢ (بل تساوي)
ليس أكبر

لا تصلح الأطوال ٢٠ ، ١٢ ، ٣٢ لتكون مثلث

(iii) لأن طولي أي ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث

٩ + ٤٠ > ٤١



وكذلك ٩ + ٤١ > ٤٠

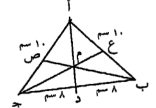
وكذلك ٤٠ + ٤١ > ٩

فإن الأطوال ٩ ، ٤٠ ، ٤١ سم تصلح لأن تكون مثلث كما في الشكل.

مثال (١١):

أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٦ سم، والنقطة م ملتقى المستقيمات المتوسطة، د منتصف ب جـ.

احسب الأطوال م أ ، م ب ، م د



كما في الشكل:

بما أن أ د مستقيم متوسط وارتفاع في

في نصف الوقت فإن:

أ ب د قائم الزاوية في د.

∴ (أ ب)^2 = (ب د)^2 + (د أ)^2

(١٠)^2 = (٨)^2 + (د أ)^2

١٠٠ = ٦٤ + (د)^2

- ٦٤ - ٦٤

---

٣٦ = (أ د)^2

∴ أ د = $\sqrt{٣٦}$ = ٦ سم

أ م = $\frac{٢}{٣}$ أ د = $\frac{٢}{٣} \times ٦$ = ٤ سم

م د = $\frac{١}{٣}$ أ د = $\frac{١}{٣} \times ٦$ = ٢ سم

م تقسم أ د بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس أ

(م ب)^٢ = (ب د)^٢ = (م د)^٢

= (٨)^٢ + (٢)^٢

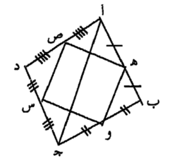
= ٦٤ + ٤ = ٦٨

م ب = $\sqrt{٦٨}$ = $\sqrt{٤ \times ١٧}$ = ٢$\sqrt{١٧}$ = (٢) (٤,١) = ٨,٢ سم

مثال (١٢):

أ ب جـ د شكل رباعي فيه النقط هـ ، و ، س ، ص منصفات أضلاعه أ ب ، ب جـ ، جـ د ، د أ كما في الشكل. بيّن أن هـ و س ص متوازي أضلاع.

نصل أ جـ



هـ و // أ جـ ويساوي نصفه (قطعة واصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث)

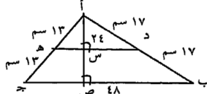
ص س // أ جـ ويساوي نصفه

∴ هـ و // ص س (١)

هـ و = ص س = $\frac{١}{٢}$ أ جـ (٢)

∴ ضلعان متوازيان ومتساويان فالشكل هـ و س ص متوازي أضلاع.

مثال (١٣):



في الشكل المجاور:

احسب مساحة أ د هـ علماً بأن أ ص = ١٨ سم

وكذلك مساحة أ ب جـ والنسبة بين مساحتها

أ د هـ يشابه أ ب جـ لتناسب الأضلاع حيث

$$\frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{١}{٢}$$

مساحة أ د هـ = $\frac{١}{٢}$ (د هـ) × أ س = $\frac{١}{٢}$ × ٢٤ × ($\frac{\text{ص}}{٢}$)

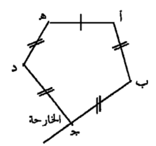
= ($\frac{١}{٢}$) (٢٤) ($\frac{٢٤}{٢}$) = (١٢) (٩) = ١٠٨ سم^{٢}

مساحة أ ب جـ = ($\frac{١}{٢}$) (ب جـ) (أ ص) = ($\frac{١}{٢}$) (٤٨) (١٨) = ٤٣٢ سم^{٢}

$$\frac{\text{مساحة أ د هـ}}{\text{مساحة أ ب جـ}} = \frac{١٠٨}{٤٣٢} = \frac{١}{٤} = ١ : ٤$$

مثال (١٤):

ما قياس كل زاوية داخلة في الشكل الخماسي المنظم (مخمس) وكل زاوية خارجة له.



مجموع قياسات زوايا المخمس

= (ن - ٢) × ١٨٠°

= (٥ - ٢) (١٨٠) = ٣ (١٨٠)

= ٥٤٠°

قياس كل زاوية داخلة = $\frac{٥٤٠}{٥}$ = ١٠٨°

الخارجة = ١٨٠° - الداخلة

= ١٨٠ – ١٠٨ = ٧٢°

كون قياس الزاوية الداخلة + الخارجة = ١٨٠° (على خط مستقيم)

مثال (١٥):

أ ب جـ د معين إذا كان قياس الزاوية أ = ٧٠°

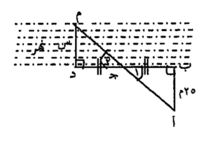
فما قياس كل من زواياه ب ، جـ ، د

∢ ب = ١٨٠° - ٧٠° = ١١٠° (بوضع تحالف)

∢ جـ = ٧٠° كل زاويتين متقابلتين متساويتين بالقياس

∢ د = ١١٠° كل زاويتين متقابلتين متساويتين بالقياس.

مثال (١٦):



لإيجاد عرض النهر س المبين في الشكل،

وصل شخص من النقطة أ النقطتين جـ ، م

ثم قاس المسافة ب جـ ، جـ د فوجد أنهما

متساويتان ، من عرض النهر س.

المثلثان أ ب جـ ، م د جـ متطابقان

كون: ∢ ١ = ∢ ٢ تقابل بالرأس

∢ ب = ∢ د قوائم

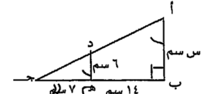
ب جـ = جـ د معطيان

(زاويتان وضلع)

وينتج من الانطباق أن أ ب = س = ٢٥ متر

∴ عرض النهر = ٢٥ متراً.

مثال (١٧):



احسب طول أ ب

المثلثان أ ب جـ ، د هـ جـ

متشابهان لتساوي قياس كل من زواياهما المتناظرة

فأضلاعهما متناسبة.

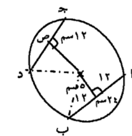
∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ جـ}}$

$\frac{\text{س}}{٦} = \frac{٢١}{٧}$ وبالضرب التبادلي

$\frac{٧}{٧}$ × س = ٦ × $\frac{\overset{٣}{\cancel{٢١}}}{\underset{١}{\cancel{٧}}}$

س = ١٨ سم.

مثال (١٨):



في الشكل بين اذا كان طول الوتر ب جـ - ٢٤ سم

وبعده عن المركز م س = ٥ سم

احسب طول الوتر جـ د الذي بعده عن المركز م ص = ١٢ سم

(م ب)^{٢} = (٥)^{٢} + (١٢)^{٢} = ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩

م ب = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣ سم نصف قطر الدائرة = م د

(م د)^{٢} = (م ص)^{٢} + (ص د)^{٢}

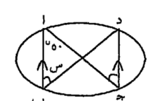
١٦٩ = (١٢)^٢ + (ص د)^٢ ⟵ (ص د)^٢ = ١٦٩ − ١٤٤ = ٢٥

ص د = √٢٥ = ٥ سم

جـ ص د (٢) (٥) = ١٠ سم طول الوتر جـ د.

مثال (١٩):

من الشكل احسب قيمة س بالدرجات



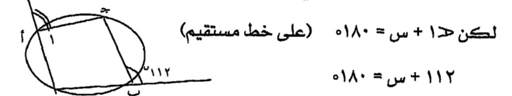
س = ∢ جـ (محيطتان بالقوس د أ)

لكن ∢ جـ = ٥٠° بالتبادل

∢ س = ٥٠°

مثال (٢٠):

ما قياس جـ أ د



∢ ١ = ١١٢° (خارجة تساوي المقابلة لمجاورتها)

لكن ∢ ١ + س = ١٨٠° (على خط مستقيم)

١١٢ + س = ١٨٠°

س = ١٨٠° − ١١٢° = ٦٨°

مثال (٢١):

ما مساحة المثلث أ ب جـ الذي فيه أَ = ١٠ سم ، بَ = ١٢ سم ، جَ = ١٦ سم وما طول محيطه؟

الحل:

ح = (أ + بَ + جـَ) / ٢ = (١٠ + ١٢ + ١٦) / ٢

ب
جـ = ١٦سم
أ = ١٠سم
جـ
أ
ب = ١٢سم

∴ ح = ١٩ سم نصف المحيط

مساحة أ ب جـ = $\sqrt{\text{ح (ح − أَ) (ح − بَ) (ح − جَ)}}$

= $\sqrt{١٩ (١٩ - ١٠) (١٩ - ١٢) (١٩ - ١٦)}$

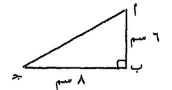
= $\sqrt{١٩ \times ٩ \times ٧ \times ٣}$

= $\sqrt{٣٥٩١}$ = ٦٠ سم^2 تقريباً

أما محيطه = ١٠ + ١٢ + ١٦ = ٣٨ سم بالضبط.

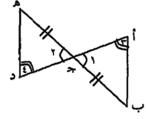
(٣- ٨) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسات والدارسين

(١) احسب مساحة المثلث القائم الزاوية أ ب جـ كما في الشكل المجاور.



{٢٤ سم^{2}}

(٢) استعن بالشكل المجاور لبيان



أن:

أ ب = هـ د

وكذلك أ ب // هـ د

(٣) هل تصلح القطع المستقيمة التالية أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٧ سم ،

جـ أ = ٥ سم أن تكون أضلاعاً لمثلث؟ { نعم }

مع ذكر السبب.؟

وكذلك القطع المستقيمة التالية: أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ١١ سم، جـ أ = ٥ سم

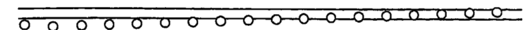
مع ذكر السبب؟ { لا }

ثم كذلك القطع المستقيمة التالية: أ ب = ٤سم ، ب جـ = ٩سم، جـ أ = ٥سم

مع ذكر السبب؟ { لا }

(٤) ما طول نصف قطر الدائرة التي محيطه يكافئ مساحتها بالقيمة؟

{ ٢ }



(٥) اذا كان أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب كما في الشكل

أوجد قيمة كل من المتغيرات س ، ص ، ع كلاً على انفراد مما يلي:

	أ ب	ب جـ	أ جـ
(١)	٥	١٢	س
(٢)	١٠	ص	٢٦
(٣)	ع	٩	١٥

(٦) ما مساحة المسدس (سداسي منتظم) الذي طول ضلعه ١٠ سم؟

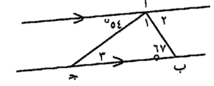
{١٥٠ $\sqrt{٣}$ سم^٢}

{ارشاد: قسمه الى مثلثات متطابقة ومتساوية الأضلاع}.

(٧) استعن بالأشكال المجاورة لإيجاد قياس كل من الزوايا:

(i) ∢ ١ ، ∢ ٢ ، ∢ ٣

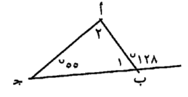
{٦٤° ، ٦٧° ، ٤٩°}



وكذلك:

∢١ ، ∢٢

{٥٢° ، ٧٣°}



وكذلك:

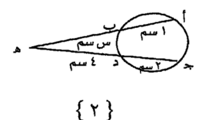
∢ ١ ، ∢٢ ، ∢٣

{٤٨° ، ٥٦° ، ٧٦°}

(٨) ما مساحة القطاع الدائري الذي نصف قطر دائرته ٦ سم، وقياس زاويته المركزية ٥٠° ، اعتبر π = ٣,١٤

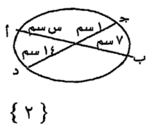
{ ١٥,٧ سم٢ }

(٩) احسب قيمة المتغير س في الشكل المجاور.



{ ٢ }

وكذلك قيمة ص في الشكل المجاور:

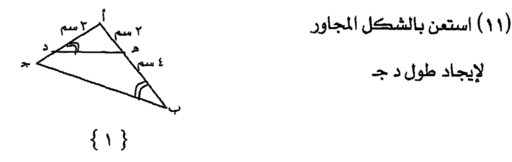


{ ٢ }

(١٠) قطاع دائري نصف قطر دائرته ١٣ سم وقياس زاويته المركزية ٧٧° احسب طول قوسه.

(١١) استعن بالشكل المجاور

لإيجاد طول د جـ



{ ١ }

{ ارشاد : استعن بالتشابه }

(١٢) اذا كان طول محيط شكل سداسي منتظم ٣٠ سم ما طول ضلعه؟ وما قياس كل زاوية من زواياه الداخلة؟

{ ٥ سم ، ١٢٠° }

(١٣) في المثلث أ ب جـ اذا كان ∢ أ = ضعف ∢ب = ٥٤° ما قياس الزاوية جـ؟

{ ٩٩° }

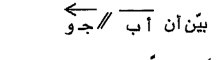
(١٤) ما مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمثلث مهما كان نوعه؟

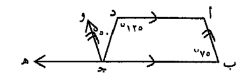
{ ٣٦٠° }

(١٥) ما عدد أضلاع المضلع المنتظم الذي قياس كل زاوية داخلة فيه هو ١٣٥° ؟

{ ٨ }

(١٦) اعتماداً على الشكل المجاور

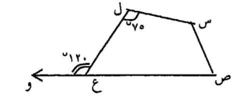

بيّن أن أ ب // جـ و



(١٧) اعتماداً على الشكل المجاور

أوجد قياس الزاوية س

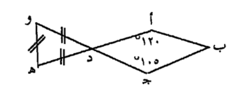
{ ١٤٠° }



(١٨) اعتماداًعلى الشكل المجاور

أوجد قياس الزاوية ب

{ ٧٥° }



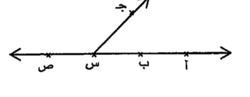
(١٩) اعتماداً على الشكل المجاور

أجب بنعم أو لا :

(١) س ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

(٢) ص ∉ $\overleftrightarrow{\text{ب س}}$

(٣) $\overline{\text{أ ب}}$ = $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$



(٤) $\overleftrightarrow{أب} = \overleftrightarrow{سص}$

(٥) $\overleftarrow{بأ} \cap \overleftarrow{سص} = \phi$

(٢٠) ما قياس الزاوية المكملة للزاوية ∢ أ = ٦٥° وما قياس الزاوية المتممة لها؟

{ ١١٥° ، ٢٥° }

(٢١) اذا كان $\overleftrightarrow{سص} \parallel \overleftrightarrow{بجـ}$ واعتماداً على الشكل:

احسب قياس كل من

الزوايا ، ١ ، ٢ ، ٣

ص س ٤٧° ١ ٦٥° ٣ ٢ جـ ب

{ ٦٨° ، ٦٥° ، ٤٧° }

(٢٢) املأ الفراغ بعنصر من عناصر المجموعة س = {متعامدان، متساويان، غير متساويين} :

(١) قطرا المستطيل ....

(٢) قطرا المربع .... و ....

(٣) قطران المعين ....

(٤) قطرا متوازي الأضلاع ....

(٥) قطرا شبه المنحرف ....

(٢٣) ما نصف قطر دائرة محيطها يساوي محيط مربع طول ضلعه ٤٤ سم؟

{٢٨ سم}

(٢٤) مستطيل محيطه ٢٤٠ سم والنسبة بين طوله وعرضه كنسبة ٧ : ٥ أوجد مساحته. {٣٥٠٠ سم²}

{ ارشاد : استعن بالتقسيم التناسبي }

(٢٥) قطعتان من الأرض، الأولى على شكل مستطيل طوله ٧٠ م وعرضه ٣٠ م.

والثانية على شكل مربع طول ضلعه ٥٠ م.

احسب النسبة بين مساحتيهما.

{ ٢١ : ٢٥ }

(٢٦) أوجد النسبة بين محيط دائرة ومساحتها اذا كان نصف قطرها ٢١ سم.

{ ٢ : ٢١ }

(٢٧) ما النسبة بين قياسي الزاوية القائمة والزاوية المستقيمة؟

{ ١ : ٢ }

(٢٨) اعتمد على الشكل



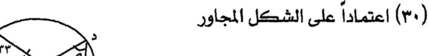
في حسابك لمساحة المنطقة المظللة.

علماً بأن أ ب جـ د مستطيل.

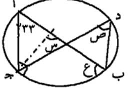
{ ٥٤ سم^2 }

(٢٩) ارسم قطعة مستقيمة $\overline{\text{ب جـ}}$ طولها ٨ سم أو نصِّفها بالنقطة د ثم أقم من د

العامود د أ على ب جـ طوله ٢ سم وأوجد بالقياس طولي $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$.



(٣٠) اعتماداً على الشكل المجاور



ما قيمة كل من س ، ص ، ع

بالدرجات؟

{ ٦٦° ، ٣٣° ، ٥٧° }

(٣١) من الشكل المجاور:

أوجد طول المماس هـ و

{ ٦ $\sqrt{٥}$ }

(٣٢) ما عدد أضلاع المضلع المنتظم الذي قياس كل زاوية من زواياه الخارجة = ٤٥° ؟

{ ٨° }

(٣٣) أ ب جـ د شكل رباعي دائري، فإذا كانت قياس الزاوية د ب جـ = ٢٠° وقياس الزاوية أ د جـ = ١١٥° فما قياس الزاوية أ جـ د ؟

{ ٤٥° }

(٣٤) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فإذا كان أ ب = ٥,٧ سم ، ب جـ = ٨,٤ سم احسب طول الوتر أ جـ ، مساحة المثلث أب جـ.

{ ١٠,٥ سم ، ٢٤ سم^{٢} }

(٣٥) اذكر نوع كل زاوية من الزوايا التي قياسها:

(١) ٣٥° (٢) ١٨٠° (٣) ١٧٩°

(٤) ٧٥° (٥) ٩٠° (٦) ٢٥٥°

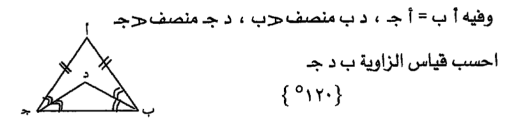
(٧) $\frac{٦}{٥}$ القائمة.

(٣٦) اعتماداً على الشكل المجاور والذي يمثل المثلث أ ب جـ

وفيه أ ب = أ جـ ، د ب منصف ∠ب ، د جـ منصف ∠جـ

احسب قياس الزاوية ب د جـ

{ ١٢٠° }



(٣٧) أ ب جـ د شكل رباعي فيه أ ب = د جـ ، أ د = ب جـ وصل قطره أ جـ بيّن أن قياس الزاوية جـ أ د = قياس الزاوية أ جـ ب.

{ ارشاد : انطباق مثلثات }

(٣٨) ما النسبة بين مساحتي المعين الذي أطوال أقطاره ٨ ، ١٠ سم والمستطيل الذي أبعاده ٦ ، ٨ سم ؟

{ ٥ : ٦ }

(٣٩) شبه منحرف طولا قاعدتين المتوازيتين ٣٤ ، ٢٦ سم ومساحة سطحه ٤٥٠ سم٢ احسب طول ارتفاعه.

{ ١٥ سم }

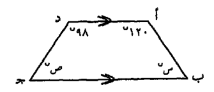
(٤٠) أكمل البيانات المتعلقة بالدائرة والمفقودة من الجدول التالي:

معتبراً π = $\frac{٢٢}{٧}$ أو ٣,١٤ كما تريد.

الرقم	نصف قطر الدائرة	قطر الدائرة	محيط الدائرة	مساحة سطح الدائرة
(١)	٧ سم	......	......	....
(٢)	....	٣٥ سم	......	....
(٣)	....	......	٢٢٠ سم	....
(٤)	......	......	....	٦١٦ سم٢

(٤١) ما قيمة المتغيرين س ، ص بالدرجات مستعيناً بالشكل التالي.

{ ٦٠° ، ٨٢° }



(٤٢) انقل الجدول التالي الى دفترك ثم ضع √ أو × في أماكنها المناسبة.

الشكل / الخاصية	شبه المنحرف	متوازي الأضلاع	المستطيل	المعين	المربع
كل ضلعين متقابلين متوازيان					
كل ضلعين متقابلين متساويان					
كل زاويتين متقابلتين متساويتان					
قطراه متساويان					
قطراه متعامدان					

(٤٣) املأ بيانات الجدول التالي والمتعلقة بمجموعة من المثلثات:

الرقم	طول القاعدة	الارتفاع	المساحة
(١)	٤ سم	٣ سم	……
(٢)	٦ سم	………	٢٤ سم^{٢}
(٣)	…….	٨ سم	٤٨ سم^{٢}

(٤٤) يمثل الشكل دواراً يحيط به رصيف.



احسب مساحة الرصيف.

اعتبر = ٣,١٤

{ ١٣٨,١٦ م^{٢} }

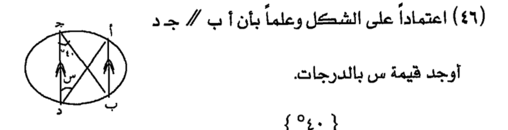
(٤٥) كم دائرة يمكنك أن ترسم بحيث:

(١) تمر كل منها بنقطة معلومة. { عدد لا نهائي من الدوائر }

(٢) تمر كل منها بنقطتين معلومتين { عدد لا نهائي من الدوائر }

(٣) تمر كل منها بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة {دائرة فقط }

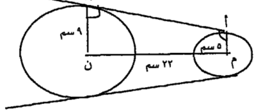
(٤٦) اعتماداً على الشكل وعلماً بأن أ ب // جـ د



أوجد قيمة س بالدرجات.

{ ٤٠° }

(٤٧) يمثل الشكل حزاماً يمر حول بكرتين، نصف قطر الصغرى منهما ٥ سم ونصف قطر الكبرى ٩ سم.

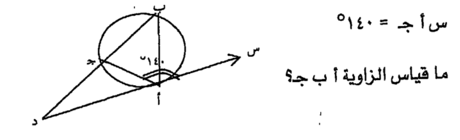


والبعد بين مركزي البكرتين ٢٢سم

احسب طول الجزء من الحزام الواصل بين النقطتين أ ، جـ

{ ارشاد : استخدم نظرية فيثاغورس } { ٢١،٦ سم }

(٤٨) اعتماداً على الشكل وعلماً بأن $\overleftrightarrow{\text{س د}}$ مماس للدائرة وقياس الزاوية



س أ جـ = ١٤٠°

ما قياس الزاوية أ ب جـ؟

(٤٩) علماً بأن $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{د هـ}$ مماسان للدائرة كما في الشكل:

احسب قياس الزاوية جـ أ ب

{ ١٥٠° }

{ ارشاد: صل أ د }

(٥٠) هل الشكل الرباعي أ ب جـ د كما في الرسم دائرياً؟

{ نعم، لأن فيه زاويتان متقابلتان متكاملتان}

(٥١) اعتمد على الشكل المجاور في ايجاد قياس

كلاً من الزاوية ب أ د والزاوية أ ب هـ

{ ١٣٠° ، ١٢٠° }

(٥٢) اعتماداً على الشكل ما قيمة كل من

س ، ص ، ع بالدرجات؟

{ ٤٨° ، ٣٢° ، ٤٢° }

(٥٣) من الشكل المجاور:

ما قياس الزاوية أ د جـ بالدرجات؟

{ ٤٠° }

{ ارشاد: صل جـ ب }

(٥٤) $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{أ جـ}$ مماسات لدائرة اذا كان قياس الزاوية ب أ جـ = ٥٤° وكانت النقطة د على القوس $\overline{ب جـ}$ الأكبر، ما قياس الزاوية ب د جـ؟

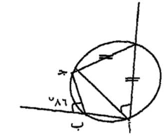
{ ٦٣° }

(٥٥) $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ وتران متطابقان في نصف دائرة، اذا كان $\overline{ب جـ}$ قطر فيها ما قياس الزاوية أ جـ ب؟

{ ٤٥° }

(٥٦) من الشكل ما قياس الزاوية د أ جـ؟

{ ٤٧° }



(٥٧) رُسم المستطيل أ ب جـ د داخل دائرة، فإذا كان أ ب = ١٠ سم ، ونصف قطر الدائرة ١٣ سم ، فما طول أ د ؟

{ ٢٤ سم }

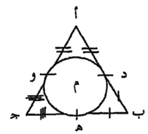
(٥٨) الشكل يمثل دائرة مرسومة داخل مثلث وتمس أضلاعه:

فإذا كان طول أ ب = ١٠ سم

ب جـ = ٥ سم

أ د = ١٢ سم

ما طول أ د ؟



{ ٨,٥ سم }

(٥٩) احسب مساحة المثلث أ ب جـ المتطابق الأضلاع وطول ضلعه ١٠ سم.

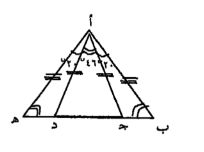
$\{ ٢٥\sqrt{٣} \}$

{ ارشاد : هناك أكثر من طريقة }

(٦٠) مربع طول ضلعه ٤ + ٥ $\sqrt{٢}$ سم فما طول محيطه وما مساحته؟

$\{ ١٦ + ٢٠\sqrt{٢} ، ٦٦ + ٤٠\sqrt{٢} \}$

(٦١) من الشكل المجاور احسب



قياس الزاوية أ ب جـ.

والزاوية أ د هـ

{ ٤٧° ، ١١٣° }

(٦٢) الأعداد التالية تمثل أطوال أضلاع مثلث، فأي منها يشكل مثلثاً قائم الزاوية؟

(١) ٨ ، ١٥ ، ١٧ سم (٢) ١٠ ، ١٥ ، ٢ سم (٣) ٨ ، ٨، ٦ سم

(٦٣) ما النسبة بين مساحة مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٨ سم، ومساحة مسدس منتظم طول ضلعه ٤ سم؟

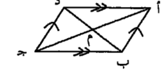
(٦٤) انطلقت سفينة من نقطة في البحر باتجاه الجنوب وقطعت لمسافة ٩٠ كم ثم انحرفت نحو الشرق فقطعت ٦٠ كم ثم انحرفت نحو الشمال وقطعت مسافة ٥٠ كم وأخيراً انحرفت نحو الغرب وقطعت مسافة ١٣٠ كم.

ما بعد السفينة عن نقطة انطلاقها منذ البدء ؟

{ ٨٠.٦ كم تقريباً }

(٦٥) أب جـ مثلث متساوي الساقين، فرضت نقطة مثل د على ب جـ ثم وصل أ د أيهما أكبر أ ب أم أ د ؟ ولماذا؟

(٦٦) انظر الشكل المجاور ثم أجب بنعم أو لا (علماً بأن الشكل متوازي أضلاع):



(١) أ م = ب م ، الاجابة ....

(٢) ∢ أ ب م = ∢ أ د جـ، الاجابة ....

(٣) مساحة المثلث أ ب م = مساحة المثلث جـ م د ، الاجابة ....

(٦٧) س ص ع مثلث طول قاعدته ٨٠ سم وارتفاعه ٣٠ سم

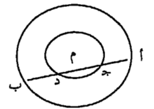
و: أ ب جـ مثلث طول قاعدته ٦٠ سم وارتفاعه ٤٠ سم

أوجد النسبة بين مساحتيهما.

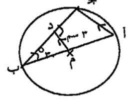
{ ١ : ١ }

(٦٨) رسمت دائرتان متحدتان بالمركز م ورسم الوتر أ ب في الدائرة الكبرى ويقطع الدائرة الصغرى في جـ ، د بيّن أن أ جـ = د ب

كما في الشكل.

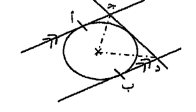


(٦٩) من الشكل المجاور وإذا كان م د = ٣ سم وقياس ∢ب = ٣٠° أوجد طول الوتر أ جـ وطول القطر أ ب؟



{ ٦ ، ١٢ }

(٧٠) من الشكل المجاور الذي يمثل ثلاثة مماسات



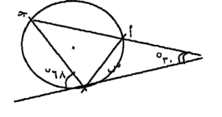
أ جـ ، جـ د ، د ب ، وان أ جـ // ب د

أوجد قياس الزاوية جـ م د

{ ٩٠° }

{ استعن بتطبيق المثلثات }

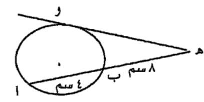
(٧١) في الشكل المجاور د ب مماس،



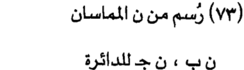
احسب قياس الزاوية أ ب د

{ ٣٨° }

(٧٢) من الشكل المجاور

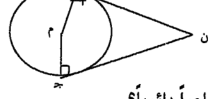


أوجد طول المماس هـ و



(٧٣) رُسم من ن المماسان

ن ب ، ن جـ للدائرة



م كما في الشكل.

بيّن لماذا يكون الشكل م ب ن جـ رباعياً دائرياً؟

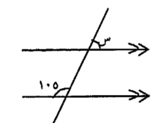
(٧٤) أ ب جـ مثلث متساوي الساقين رسم مستقيم موازي للقاعدة ب جـ فقطع الساقين في س ، ص بيّن أن الشكل ب جـ ص س رباعي دائري.

(٧٥) ن نقطة خارج الدائرة م، والمطلوب رسم مماسين للدائرة م من النقطة ن باستعمال المسطرة والفرجار فقط.

{ ارشاد : ارسم دائرة قطرها ن م }

(٧٦) حديقة مستطيلة الشكل مساحتها ١٥٠٠ م وطولها $\frac{٢}{٣}$ ٤١ متر، فإذا أحيطت بسياج تكلفته الكلية ٤٦٦ ديناراً، ما تكلفة المتر الطولي الواحد منه؟

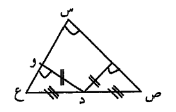
(٧٧) من الشكل المجاور اذكر:



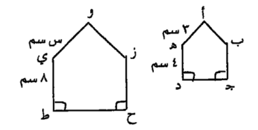
(١) زوجاً من الزوايا المتتامة.

(٢) زوجاً من الزوايا المتكاملة.

(٧٨) من الشكل المجاور ما قيمة س بالدرجات؟



(٧٩) اعتماداً على الشكل المجاور بيّن أن



∢ص = ∢ع

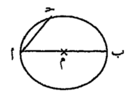
{ ارشاد: استعن بتطبيق المثلثين }

(٨٠) اذا كان الشكلان الخماسيان المتجاوران متشابهين.

أوجد قيمة س بالسنتميترات.

الساعة الرابعة مساءً وقف طلال بجانب عمارتهم الكائنة في جبل المريخ، فلاحظ أن طول ظله ٤ م وأن طول ظل العمارة ٨ م، ما ارتفاع العمارة اذا كان طول طلال ١,٨ متر؟

(٨١) طول ضلع مربع ($\sqrt{11}$ + ١) سم احسب محيطه ومساحته.



(٨٢) ماذا تسمى القطع المستقيمة التالية:

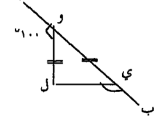
$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م جـ}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ بالنسبة للدائرة

انظر الشكل المجاور.

(٨٣) دائرة مركزها م ونصف قطرها ٥ سم ما طول $\overline{\text{م س}}$ اذا كانت النقطة س تقع:

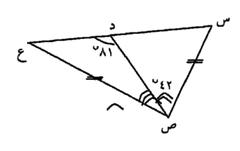
(١) على الدائرة (محيطها). (٢) داخل الدائرة (٣) خارج الدائرة.

(٨٤) هل تصلح الأطوال ٧ سم ، ٤ سم ، ٥ سم لأن تكون أضلاعاً لمثلث؟ ولماذا؟



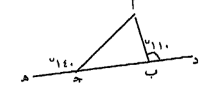
(٨٥) من الشكل المجاور، ما قياس الزاوية ل ي ب ؟

{ ١٣٠° }



(٨٦) من الشكل المجاور، احسب قياس الزاوية د ص ع.

{ ٦٠° }



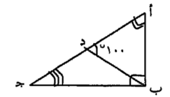
(٨٧) من الشكل المجاور أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ.

{ ٧٠° ، ٧٠° ، ٤٠° }

(٨٨) هل المثلث الذي أطوال أضلاعه ١٢ ، ٧ ، $\sqrt{١٩٣}$ سم قائم الزاوية؟

"بيّن ذلك بالنفي أو الإيجاب."

(٨٩) من الشكل المجاور



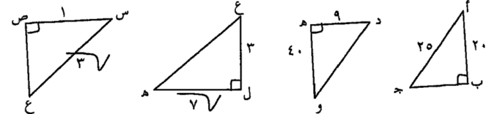
احسب قياسي الزاويتين أ ، جـ

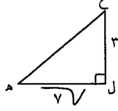
(٩٠) مستعيناً بنظرية فيتاغورس مثل الأعداد الحقيقية التالية:

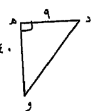
$\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٥}$ على خط الأعداد ونظائرها الجمعية أيضاً مثلها على نفس الخط.

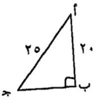
{ارشاد: اجعل كلاً منها وتراً في مثلث قائم الزاوية ضلعاه الآخران عددان طبيعيان }.

(٩١) احسب طول الضلع الثالث في كل من المثلثات القائمة الزاوية التالية:









(٩٢) يقف عبدالله بجانب عامود للكهرباء وسار جنوباً مسافة ١٠ أمتار ثم اتجه وسار شرقاً مسافة ٦ أمتار، كم متراً بعده الآن عن نقطة الانطلاق (عامود الكهرباء)؟

(٩٣) يُراد عمل قطعة ورق على شكل مربع طول قطرها ١٨ سم ما أبعادها؟

(٩٤) يرتكز سُلّم طول ٢,٥ م على حائط عامودي، ويبعد أسفله عن الحائط ٠,٧م احسب ارتفاع قمة السلم عن الأرض.

(٩٥) ارسم زاوية قياسها ٤٥° بالمنقلة ثم انقلها باستخدام المسطرة والفرجار فقط.

(٩٦) ارسم زوايا قياساتها ٣٠° ، ٦٠° ، ١٥٠° باستخدام المنقلة، ثم نصّف كلاً منها بالمسطرة والفرجار.

(٩٧) ارسم مثلث أطوال أضلاعه ٨ ، ٧ ، ٩ سم ونصّف كل منها بالمسطرة والفرجار.

(٩٨) عيّن العبارة الصائبة من العبارات الثلاث التالية:

(١) اذا كانت المسافة بين نقطتين على محيط الدائرة تساوي ١٠ سم فإن نصف قطرها يساوي ٥ سم.

(٢) يوجد مثلث مجموع قياسي أي زاويتين فيه ٩٠°.

(٣) اذا كانت الزاوية أ ب د خارجة للمثلث أ ب جـ فإنها يجب أن تكون منفرجة أكبر من ٩٠° وأقل من ١٨٠°.

(٩٩) اذا كان المثلث أ ب جـ متساوي الأضلاع طول ضلعه ١١ سم ما طول أ د منصف الزاوية أ والذي يلاقي ب جـ في د ؟

{ $\frac{١١\sqrt{٣}}{٢}$ سم }

(١٠٠) في الشكل المجاور اذا كان:

أ ب = أ جـ = ٨ سم

وكان ب جـ = ب د = ٤ سم

احسب طول جـ د.

{ ٢ سم }

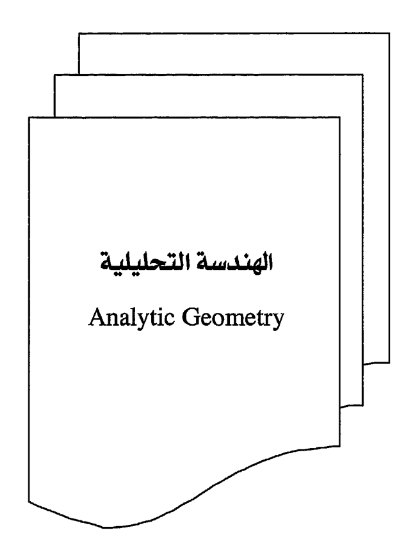
{ارشاد: احسب مساحة المثلث بدلالة أضلاعه ثم احسب ارتفاعه ومن ثم جـ د}

(١٠١) ما عدد أضلاع المضلع المنتظم الذي قياس كل زاوية من زواياه الداخلة

$٢٥ \frac{٥}{٧}$ ؟

ارشاد: اختر الجواب من الأعداد التالية

{ ١٤ ، ٩ ، ١٠ ، ٧}


الهندسة التحليلية
Analytic Geometry

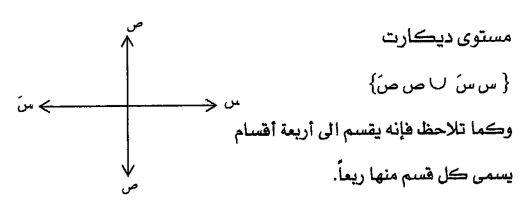
انها هندسة ديكارت (١٥٩٦ - ١٦٥٠)م الفيلسوف وعالم الرياضيات الفرنسي مبتكرها وواضع أسسها المتينة التي تمزج مفاهيم الجبر بمفاهيم الهندسة، وتُمثل الأعداد الحقيقية هندسياً بنقط، لذا تسمى الهندسة التحليلية أو هندسة النقط أو هندسة ديكارت أيما شئت من هذه التسميات.

هذا لا يمنع من الاعتراف بأن عالم الرياضيات الألماني جاوس (١٧٧٧ – ١٨٥٥)م قد أضاف كثيراً من المفاهيم والمصطلحات الهامة والجوهرية الى الهندسة التحليلية حتى أضحت هذه الهندسة بالذات وسيلة من وسائل تطوير الرياضيات.

(٤- ١) المستوى الديكارتي Cartisian Plane

أو السطح البياني كما يُسمى عند البعض من الرياضيين ، وهذا السطح مجموعة من النقط ناتج عن اتحاد خط الأعداد الأفقي س سَ والذي يُسمى محور السنيان بخط الأعداد الرأسي أو العامودي عليه ص صَ والذي يُسمى محور الصادات حيث الزاوية بينهما قائمة كما في الشكل

و



مستوى ديكارت

{ س سَ ∪ ص صَ}

وكما تلاحظ فإنه يقسم الى أربعة أقسام

يسمى كل قسم منها ربعاً.

و {س سَ ∩ ص صَ} = النقطة و تسمى نقطة الأصل Original Point.

وبلغة الاقترانات هناك اقتران تناظر (واحد لواحد وشامل) بين نقط المستوى الديكارتي وعناصر مجموعة حاصل الضرب الديكارتي ح × ح كأزواج مرتبة حيث

كل نقطة مثل أ ∈ المستوى الديكارتي

تناظر الزوج المرتب ($س_1$ ، $ص_1$) ∈ ح × ح

والعكس أيضاً صواب أي أن

كل زوج مرتب ($س_1$ ، $ص_1$) ∈ ح × ح

يناظر نقطة مثل أ ∈ المستوى الديكارتي

كما في الشكل

ورياضياً يقال هناك اقتران تناظر المستوى ⟵ ح × ح

ولكل نقطة مثل أ ($س_1$ × $ص_1$) = يسمى العدد $س_1$ الاحداثي السيني للنقطة أ أو الاحداثي الأول.

= يسمى العدد $ص_1$ الاحداثي الصادي للنقطة أ أو الاحداثي الثاني.

واصطلاحاً يمكن أن يقال أن

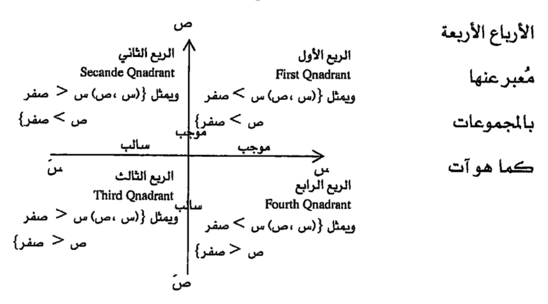
الشكل المجاور يمثل المستوى الديكارتي.

الأرباع الأربعة

مُعبر عنها

بالمجموعات

كما هو آت



ولا تنسى أن

و س > صفر ، و سَ < صفر

و ص > صفر ، و صَ < صفر

والآن يمكن استخدام المستوى الديكارتي لتعيين النقط عليه كما يلي

(٤ - ٢) تعيين النقط على المستوى الديكارتي

أصبح واضحاً الآن أن المستوى الديكارتي يمثل

نظاماً من الاحداثيات المتعامدة

وان كل نقطة في المستوى

أ (س ، ص) تمثل بزوج من

الأعداد الحقيقية

مسقطه الأول يسمى الاحداثي السني

ومسقطة الثاني يسمى الاحداثي الصادي

فلتمثيل الزوج المرتب (١ ،٢) بالنقطة أ على السطح البياني، نسير من والى اليمين حتى نحصل العدد ١ ثم نرتفع للأعلى حتى العدد ٢ كما في الشكل.

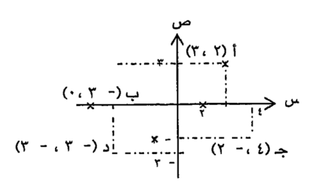
وكذلك لنمثل الزواج المرتب(- ١ ،٢) بالنقطة ب كما في الشكل أعلاه.

وهكذا لسائر الأزواج المرتبة (٣ ، - ١) بالنقطة جـ

ثم الزوج المرتب (٣ ، ٠) بالنقطة د كما في الشكل أعلاه.

عيّن الأزواج المرتبة التالية كنقط على المستوى الديكارتي

أ (٢ ، ٣) ، ب (- ٣ ، ٠) ، جـ (٤ ، - ٢) ، د (- ٣ ، - ٣)



سأعرض قواعد وقوانين الهندسة التحليلية بلا اثباتات ولا براهين، وإنما بالأمثلة والتطبيقات فقط

(٤- ٣) المسافة بين نقطتين في المستوى الديكارتي

لإيجاد طول القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين أ ($س_1$ ، $ص_1$)، ب ($س_2$ ، $ص_2$) كما في الشكل.

نستخدم القانون

أ ب = $\sqrt{(س_1 - س_2)^2 + (ص_1 - ص_2)^2}$

أو $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

كلاهما صواب

فإذا كانت أ (٣ ، ١) ، ب(٧ ، ٤) فإن

أ ب = $\sqrt{(٧ - ٣)^2 + (٤ - ١)^2}$

= $\sqrt{(٤)^2 + (٣)^2}$ = $\sqrt{١٦ + ٩}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات طول.

ما نوع المثلث الذي رؤوسه أ (- ١ ، ٥) ، ب(٥ ، - ٣) ، جـ(- ٧ ، - ٣) من حيث الأضلاع؟

لمعرفة نوعه نجد أطوال أضلاعه

أ ب $= \sqrt{(٥ - ١^-)^٢ + (- ٣ - ٥)^٢} = \sqrt{٦^٢ + (- ٢)^٢}$

$= \sqrt{٣٦ + ٦٤} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$ وحدات طول

ب جـ $= \sqrt{(٥ - ٧^-)^٢ + (- ٣ + ٣^-)^٢} = \sqrt{١٢^٢ + \text{صفر}} = ١٢$ وحدة طول

جـ أ $= \sqrt{(- ١ - ٧^-)^٢ + (- ٣ - ٥)^٢} = \sqrt{٦^٢ + (- ٨)^٢}$

$= \sqrt{٣٦ + ٦٤} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$ وحدة طول

وبما أن أ ب = أ جـ فإن أ ب جـ مثلث متساوي الساقين، .

(٤- ٤) احداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة

لإيجاد احداثيات منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطة أ$(س_١ ، ص_١)$ ، ب$(س_٢ ، ص_٢)$

نستخدم القانون.

احداثيات جـ$\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$

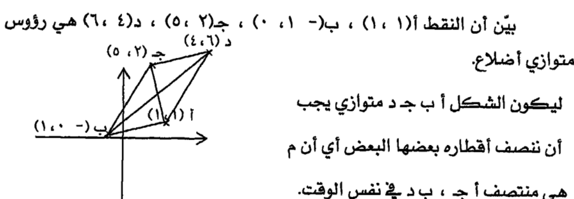
فإذا كانت أ (- ٢ ، ٥) ، ب(- ١ ، - ٣) فإن

احداثيات جـ منتصف القطعة المستقيمة أ ص

جـ $\left(\frac{- ٢ - ١}{٢} ، \frac{٥ - ٣}{٢} \right)$

$=$ جـ $\left(\frac{- ٣}{٢} ، \frac{٢}{٢} \right) = \left(\frac{- ٣}{٢} ، ١ \right)$

بيّن أن النقط أ(١ ، ١) ، ب(- ١ ، ٠) ، جـ(٢ ، ٥) ، د(٤ ، ٦) هي رؤوس متوازي أضلاع.



ليكون الشكل أ ب جـ د متوازي يجب أن تنصف أقطاره بعضها البعض أي أن م هي منتصف أ جـ ، ب د في نفس الوقت.

احداثيات نقطة منتصف أ جـ هي $\left(\frac{٢ + ١}{٢} ، \frac{٥ + ١}{٢}\right) = \left(\frac{٣}{٢} ، ٣\right)$

احداثيات نقطة منتصف ب د هي $\left(\frac{٤- ١}{٢} ، \frac{٦ + ٠}{٢}\right) = \left(\frac{٣}{٢} ، ٣\right)$

أي أن للقطرين نفس نقطة المنتصف وهي م

∴ أ ب جـ د متوازي أضلاع كونه شكل رباعي أقطاره تنصف بعضها البعض.

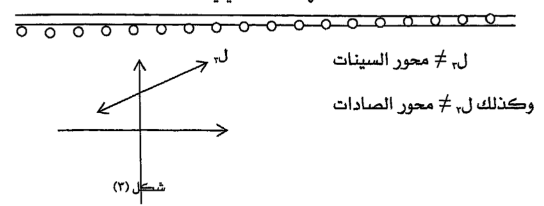
(٤- ٥) ميل المستقيم ومعادلته

للمستقيم في المستوى الديكارتي ثلاثة أوضاع هي

الوضع الأفقي للمستقيم وعندها يكون المستقيم موازياً لمحور السينات الأفقي كما في الشكل (١) $ل_١ \parallel$ س سَ

والوضع العامودي للمستقيم وعندها يكون المستقيم موازياً لمحور الصادات كما في الشكل (٢) $ل_٢ \parallel$ ص صَ

والوضع الثالث لا يكون عندها المستقيم موازياً لمحور السينات ولا موازياً لمحور الصادات كما في الشكل (٣)



$ل_3 \neq$ محور السينات

وكذلك $ل_3 \neq$ محور الصادات

عندها نقول أن المستقيم $ل_3$ يميل عن الأفق، فإذا كانت أ($س_1$ ،$ص_1$) ، ب($س_2$ ،$ص_2$) لإيجاد ميل القطعة المستقيمة $\overline{أ ب}$ ∋ $\overleftrightarrow{أ ب}$ نستخدم القانون

$$م_{اب} = \frac{ص_2 - ص_1 \text{ (فرق الصادين)}}{س_2 - س_1 \text{ (فرق السينين)}}$$

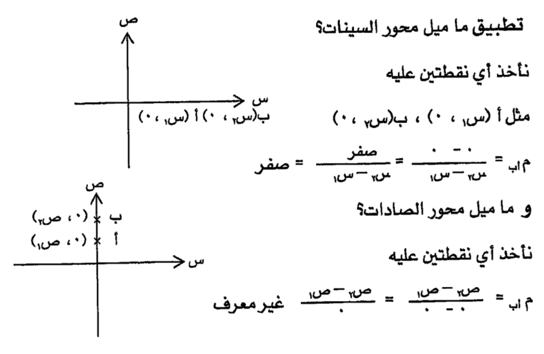
حيث $م_{اب}$ تقرأ ميل القطعة المستقيمة أ ب وبنفس الوقت ميل المستقيم أ ب .

فإذا كانت أ (٢ ، - ٣) ، ب(١ ، ٥)

$$فإن\ م_{اب} = \frac{٥ - ^-٣}{١ - ٢} = \frac{٨}{-١} = -٨$$

حقيقة هندسية

$م_{\overleftrightarrow{ي}}$ مستقيم غير منتهي = $م_{\overline{ي}}$ قطعة مستقيمة تنتمي اليه.



تطبيق ما ميل محور السينات؟

نأخذ أي نقطتين عليه

مثل أ ($س_1$ ، ٠) ، ب($س_2$ ، ٠)

$$م_{اب} = \frac{٠ - ٠}{س_2 - س_1} = \frac{صفر}{س_2 - س_1} = صفر$$

و ما ميل محور الصادات؟

نأخذ أي نقطتين عليه

$$م_{اب} = \frac{ص_2 - ص_1}{٠ - ٠} = \frac{ص_2 - ص_1}{٠}$$ غير معرف

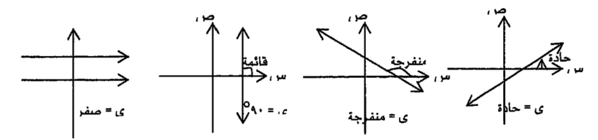
لذا يقال بأن محور الصادات لا ميل له، وكذلك كل مستقيم يوازيه.

وأما محور السينات فميله صفر، وكذلك كل مستقيم يوازيه.

أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين أ(٢ ، - ١) ، ب(٣ ، ٥)

م اب = $\frac{-١ - ٥}{٢ - ٣}$ = $\frac{-٦}{-١}$ = ٦

ولما كان كل مستقيم في المستوى الديكارتي يصنع زاوية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات كما في الأشكال



فإن م المستقيم = ظاي حيث ى هي الزاوية التي يضعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات كما في الأشكال السابقة.

فعندما ى حادة فالميل موجب لأن ظا الزاوية الحادة موجب.

وعندما ى منفرجة فالميل سالب لأن ظا الزاوية المنفرجة سالب.

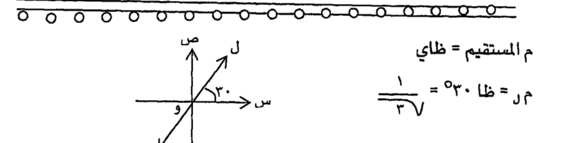
وعندما ى قائمة فالميل غير معرف لأن ظا الزاوية القائمة كمية غير معرفة.

وعندما ى صفر فالميل صفر لأن ظا الزاوية صفر هو صفر.

ما ميل المستقيم الذي يصنع زاوية ٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات؟

م المستقيم = ظاي

$م_{ل} = ظا ٣٠^{\circ} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

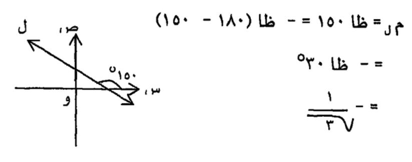


وكم ميله عندما يصنع زاوية مقدارها ١٥٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات؟

$م_{ل} = ظا ١٥٠ = - ظا (١٨٠ - ١٥٠)$

$= - ظا ٣٠^{\circ}$

$= - \frac{١}{\sqrt{٣}}$



والملاحظ أن م المستقيم الذي يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات موجب

وأن م المستقيم الذي يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات سالب

أما معادلة المستقيم

لمّا كانت المعادلة طرفان متساويان من الرموز والأعداد، فإن معادلة المستقيم المعلوم ميله مثل م ونقطة واقعة عليه مثل أ $(س_{١} ، ص_{١})$ هو

$ص - ص_{١} ، م (س - س_{١})$ كما في الشكل.

فإذا كان ميله ٢ ويمر بالنقطة (- ١ ، ٥) فإن

معادلته ص - ٥ = ٢ (س - ١-)

ص - ٥ = ٢س + ٢

ص = ٢س + ٥ + ٢

ص = ٢س + ٧

وللتحقق من صحة الحل يجب أن يكون معامل س هو الميل

أي م = ٢ كما في المعادلة.

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ (٢ ، - ١) ، ب (٣ / ٥)؟

فإننا نجد أولاً الميل

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - ١^-}{٣ - ٢} = \frac{٦}{١} = ٦$$

ومنها معادلته

$$ص - ص_١ = م (س - س_١)$$

نأخذ أي من النقطتين أ أو ب وكلاهما صواب.

ص - ٥ = ٦ (س - ٣)

ص - ٥ = ٦س - ١٨

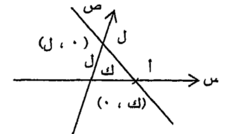
ص = ٦س - ١٨ +١٥ = ٦س - ١٣

وللتحقق من صحة الحل

م = معامل س = ٦.

وهناك صورة أخرى لمعادلة الخط المستقيم بدلالة مقطعية من المحورين، اذا كان يقطع المحورين!!

فإذا كان المستقيم أ ب يقطع المحورين في النقطتين أ ، ب كما في الشكل



حيث ك مقطعة من محور السينات

وحيث ل مقطعة من محور الصادات

فإن ميله

$$م = \frac{ل - صفر}{صفر - ك} = \frac{ل}{- ك}$$

ومعادلته بعد آخذ النقطة أ مثلاً

$ص - صفر = \frac{ل}{-ك} (س - ك)$

$ك (ص = \frac{-ل}{ك} س + ل)$

ك ص = - ل س + ل ك

$\frac{ل س + ك ص = ل ك}{ل ك}$

$\frac{س}{ك} + \frac{ص}{ل} = ١$

أو $\frac{س}{مقطعه السيني} + \frac{ص}{مقطعه الصادي} = ١$

فمعادلة المستقيم الذي مقطعه السيني = - ٣ والصادي = ٢

$- ٦ (\frac{س}{-٣} + \frac{ص}{٢} = ١) \longrightarrow$ ٢س - ٣ ص = - ٦

وخلاصة القول أن معادلة المستقيم العامة هي

أ س + ب ص + جـ = صفر حيث أ ∈ ح٭ ، ب ، جـ ∈ ح

ولإيجاد ميله من معادلته نحوّل المعادلة العامة أ س + ب ص + جـ = صفر الى الصورة التالية ص = م س + جـ ، حيث م هي ميل المستقيم ، جـ مقطعه الصادي هكذا

أ س + ب ص + جـ = صفر

$\frac{ب ص}{ب} = \frac{- أ س - جـ}{ب}$

$ص = - \frac{أ س}{ب} - \frac{جـ}{ب}$

ومنها $م = \frac{- أ}{ب}$ أي $\frac{- معامل س}{معامل ص}$

فميل المستقيم الذي معادلته ٣ س + ٢ص = ٥

هو $\frac{٢ ص}{٢} = \frac{- ٣ س}{٢} + \frac{٥}{٢}$

$ص = -\frac{٣}{٢} س + \frac{٥}{٢}$

$\therefore م_{المستقيم} = -\frac{٣}{٢}$

والآن نعرض بإيجاز طرق ايجاد ميل المستقيم

× $م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ اذا علمت عملية النقطتان أ $(س_١ ، ص_١)$ ، ب$(س_٢ ، ص_٢)$

× م = ظاي اذا علمت زاوية ميله أي الزاوية التي يضعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

× $م = -\frac{أ}{ب}$ اذا علمت معادلة المستقيم أ س + س ص + جـ = صفر.

أوجد طولا مقطعي المستقيم الذي معادلته ٢س + ٣ص = ٦ من محوري الاحداثيات.

لإيجاد مقطع الصادات نضع س = صفر

٣ ص = ٦ ⟵ ص = ٢ طول المقطع الصادي.

لإيجاد مقطع السينات نضع ص = صفر

٢س = ٦ ⟵ س = ٣ طول المقطع السيني.

نظرية

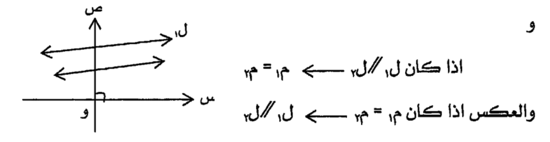
اذا توازى مستقيمان ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$ فإن $م_١ = م_٢$

والعكس صواب أي يتوازى مستقيمان اذا كان $م_١ = م_٢$ كما في الشكل

و

اذا كان $ل_١ // ل_٢$ ⟵ $م_١ = م_٢$

والعكس اذا كان $م_١ = م_٢$ ⟵ $ل_١ // ل_٢$

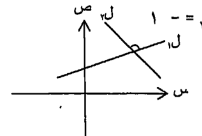


نظرية

اذا تعامد مستقيمان ميلاهما $م_1$ ، $م_2$ فإن $م_1 م_2 = -1$

والعكس صواب يتعامد مستقيمان اذا كان $م_1 م_2 = -1$

و



اذا كان $ل_1 \perp ل_2 \leftarrow م_1 م_2 = -1$

والعكس اذا كان $م_1 م_2 = -1 \leftarrow ل_1 \perp ل_2$

عيّن المستقيمات المتوازية والمتعامدة فيما يأتي

المستقيم $ل_1$ ومعادلته ص = ٣س + ١

المستقيم $ل_2$ ومعادلته ٩ ص + ٣س = ٤

المستقيم $ل_3$ ومعادلته ٢ص − ٦س = ٦

المستقيم $ل_4$ ومعادلته س + ٣ص = ٩

في البداية نجد ميل كل مستقيم

$م \overleftrightarrow{ل_1}$: ص = ٣س + ١ $\longleftarrow$ $م_1$ = ٣ معامل س

$م \overleftrightarrow{ل_2}$: $\frac{٩ ص}{٩} = \frac{-٣ س}{٩} + \frac{٤}{٩}$

ص = $-\frac{١}{٣}$ س + $\frac{٤}{٩}$ $\longleftarrow$ $م_2 = -\frac{١}{٣}$ معامل س.

$م \overleftrightarrow{ل_3}$: ٢ص − ٦س = ٦

$\frac{٢ ص}{٢} = \frac{٦س}{٢} + \frac{٦}{٢}$

ص = ٣س + ٣ $\longleftarrow$ $م_3$ = ٣ معامل س

$\overleftrightarrow{ل_٤}$ م   س − ٣ص = ٩

$$\frac{٣ص}{٣} = \frac{^-س}{٣} + \frac{٩}{٣}$$

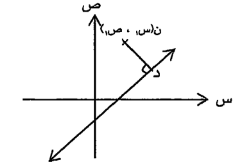
ص = + $\frac{١}{٣}$ س + ٣ ⟵ م٤ = + $\frac{١}{٣}$ معامل س

والآن يمكن أن يقال

اذا كان $م_١ = م_٢$ ⟵ فإن $ل_١ // ل_٢$

واذا كان $م_٢ م_٢$ = − ١ ⟵ فإن $ل_١ \perp ل_٢$

(٤− ٦) بعد نقطة عن مستقيم



لإيجاد بُعد النقطة ن $(س_١ ، س_١)$

عن المستقيم ل الذي معادلته العامة

أ س + ب ص + جـ = صفر

نستخدم القانون

$$ن د = \left| \frac{أ س_١ + ب ص + جـ}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}} \right|$$

حيث أ ، ب لا يساويان الصفر معاً وحيث الطول ليس سالباً.

فبعد النقطة ن (− ٥ ، ٠) عن المستقيم الذي معادلته ٣س − ٤ص + ٤ = صفر

حيث أ = ٣ ، ب = − ٤ هو

$$ن د = \left| \frac{٣ (− ٥) + (− ٤) +٤}{\sqrt{٣^٢ + (− ٤)^٢}} \right| = \left| \frac{− ١٥ − ٤ + ٤}{\sqrt{٢٥}} \right| = \frac{١٥}{٥}$$

= ٣ وحدات طول

هذا ويمكن ايجاد البعد بين مستقيمين متوازيين بواسطة القانون السابق هكذا

جد البعد بين المستقيمين المتوازيين $ل_1$ ومعادلته س − ٣ص = ١

$ل_2$ ومعادلته س − ٣ص = ٤

نفرض نقطة على أحدهما ولتكن ن على المستقيم $ل_1$ والذي معادلته س − ٣ص =١

ونجعل الاحداثي الصادي $ص_1$ = صفر ومنها س − ٣ (٠) = ١ ⟵ س = ١

فاحداثيات ن (١ ، ٠) والمستقيم $ل_2$ معادلته العامة

س − ٣ص − ٤ = صفر

ومنها ن د = $\left|\frac{١(١) - ٣(٠) - ٤}{\sqrt{١^٢ + ٣^٢}}\right| = \left|\frac{١ - ٤}{\sqrt{١٠}}\right|$

= $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$ وحدة طول.

كما يمكن بيان أن النقطة ن($س_1$ ، $ص_1$) تقع على المستقيم الذي معادلته أ س + ب ص + جـ = صفر وذلك عندما يكون البعد بين النقطة والمستقيم يساوي الصفر هكذا.

بيّن أن النقطة ن(٠ ، − ٢) تقع على المستقيم الذي معادلته ٢س − ٣ص =٦

نجد ن د ⊥ يجب أن يساوي الصفر

ن(٠ ، − ٢)

٢س − ٣ص − ٦ = صفر

ن د = $\left|\frac{٢(٠) - ٣(-٢) - ٦}{\sqrt{٢^٢ + (-٣)^٢}}\right| = \left|\frac{٦ - ٦}{\sqrt{٤ + ٩}}\right| = \frac{صفر}{\sqrt{١٣}}$ = صفر

∴ ن تقع على المستقيم والرسم يصبح هكذا

ن(٠ ، − ٢)

٢س − ٣ص = ٦

(٤- ٧) تطبيقات على الهندسة التحليلية

هذه التطبيقات تبين كيفية استخدام قوانين ونظريات الهندسة التحليلية في التحقق من صحة خصائص الأشكال الهندسية في الهندسة المستوية وكأن هذه التطبيقات بالذات هي الرابط بين الهندستين المستوية والتحليلية

سأعرض هذه التطبيقات على شكل نظريات بلا براهين ولا اثبات ولكن باستخدام الأمثلة لبيان صحة هذه الخصائص التي تتعلق بالأشكال الهندسية كما يلي

"هذه الخاصية تتعلق بالمثلث"

نظرية

طول القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث يساوي نصف طول الضلع الثالث وتوازيه أيضاً.

أ، ص، س، جـ، ب

كما في الشكل

المطلوب بيان أن

س ص = $\frac{١}{٢}$ ب جـ أولاً

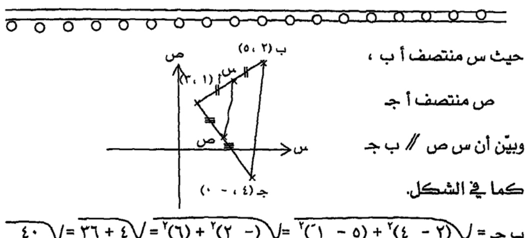
س ص // ب جـ ثانياً

كما في المثال التالي

أ ب جـ مثلث فيه

أ (١ ، ٣) ، ب(٢ ، ٥) ، جـ (٤ ، - ١)

أوجد طول القطعة س ص



حيث س منتصف أ ب ،

ص منتصف أ جـ

وبيّن أن س ص // ب جـ

كما في الشكل.

ب جـ = $\sqrt{(٢ - ٤)^{٢} + (٥ - \bar{١})^{٢}} = \sqrt{(-٢)^{٢} + (٦)^{٢}} = \sqrt{٤ + ٣٦} = \sqrt{٤٠}$

= $٢\sqrt{١٠}$ وحدة طول

بما أن س منتصف أ ب فإن س $\left(\frac{٢ + ١}{٢} ، \frac{٥ + ٣}{٢}\right)$ = س $\left(\frac{٣}{٢} ، ٤\right)$

بما أن ص منتصف أ جـ فإن ص $\left(\frac{١ + ٤}{٢} ، \frac{٣ + \bar{١}}{٢}\right)$ = ص $\left(\frac{٥}{٢} ، ١\right)$

فإن س ص = $\sqrt{\left(\frac{٣}{٢} - \frac{٥}{٢}\right)^{٢} + } = \sqrt{(١)^{٢} + (٣)^{٢}} = \sqrt{١ + ٩} = \sqrt{١٠}$

ومن تطبيق النظرية يقال

ان س ص = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = $\frac{١}{٢} \times ٢\sqrt{١٠} = \sqrt{١٠}$ سم نفس الجواب.

$م_{ب جـ} = \frac{٢ - ٤}{٥ - \bar{١}} = \frac{-٢}{٦} = -\frac{١}{٣}$

$م_{س ص} = \frac{\frac{٣}{٢} + \frac{٥}{٢}}{٤ - ١} = \frac{-١}{٣}$

∴ س ص // ب جـ

هذه الخاصية تتعلق بالمثلث القائم الزاوية فقط

نظرية

طول القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس القائمة ومنتصف الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي نصف الوتر.

والبيان كما في المثال التالي

إذا كانت أ (٢ ، ٤) ، ب (٢ ، ٠) ، جـ (٦ ، ١) رؤوس لمثلث قائم الزاوية في ب جد طول القطعة ب ص الواصلة من رأس القائمة الى منتصف الوتر س.

نجد أولاً طول الوتر

أ جـ

أ جـ = $\sqrt{(٦ - ٢)^٢ + (١ - ٤)^٢} = \sqrt{(٤)^٢ + (-٣)^٢}$

= $\sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدة طول.

نجد احداثيات س $\left(\frac{٢ + ٦}{٢} ، \frac{١ + ٤}{٢}\right)$ = س $\left(٤ ، \frac{٥}{٢}\right)$

ب س = $\sqrt{(٤ - ٢)^٢ + \left(\frac{٥}{٢} - ١\right)^٢} = \sqrt{٤ + \frac{٩}{٤}} = \sqrt{\frac{١٦ + ٩}{٤}}$

= $\sqrt{\frac{٢٥}{٤}} = \frac{٥}{٢}$

وعند تطبيق النظرية يقال أن

ب س = $\frac{١}{٢}$ أ جـ = $\frac{١}{٢} \times ٥ = \frac{٥}{٢}$ وحدة طول "نفس الجواب"

نظرية

طول القطعة الواصلة بين منتصفي الضلعين غير المتوازيين في شبه المنحرف يساوي نصف مجموع طول القاعدتين وتوازيهما أيضاً.

اذا كانت أ (- ١ ، - ١) ، ب(١ ، ١) ، جـ(٥ ، ٩) ، د(- ٣ ، ١) رؤوس شبه منحرف فيه أ ب // جـ د أوجد

طول القطعة س ص الواصلة بين الضلعين أ د ، ب جـ

نجد أولاً طولي آ ب ، جـ د

كما يلي

آ ب = $\sqrt{(١ + ١)^٢ + (١ + ١)^٢}$

= $\sqrt{٤ + ٤} = \sqrt{٨} = ٢\sqrt{٢}$ وحدة طول

جـ د = $\sqrt{(٥ + ٣)^٢ + (٩ - ١)^٢} = \sqrt{٦٤ + ٦٤} = \sqrt{١٢٨} = ٨\sqrt{٢}$ وحدة طول

وعند تطبيق النظرية يقال

وبما أن س ص = $\frac{١}{٢}$ (ق$_١$ + ق$_٢$) = $\frac{١}{٢}$ ($٢\sqrt{٢} + ٨\sqrt{٢}$) حسب النظرية أعلاه

فإن س ص = $\frac{١}{٢} \times ١٠\sqrt{٢} = ٥\sqrt{٢}$ وحدة طول.

وهناك حل مطوّل هو أن نجد احداثيات ص ($\frac{٦}{٢}$ ، $\frac{١٠}{٢}$) = ص (٣ ، هـ)

واحداثيات س ($\frac{-٣ - ١}{٢}$ ، $\frac{١ - ١}{٢}$) = س (- ٢ ، ٠)

ونجد س ص = $\sqrt{(- ٢ - ٣)^٢ + (هـ - ٠)^٢}$

= $\sqrt{٢٥ + ٢٥} = \sqrt{٥٠} = \sqrt{٢٥ \times ٢} = ٥\sqrt{٢}$ وحدة طول "نفس الجواب"

هذه الخاصية تتعلق بمتوازي الأضلاع وأقطاره بالذات.

نظرية

قطر متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر.

اذا كانت أ(- ١ ، - ١) ، ب(٣ ، ١) ، جـ (٢ ، ٢) ، د(- ٢ ، ٠) جد احداثيات نقطة تقاطع قطرية النقطة ي.

اما منصف القطر أ جـ ،

أو منصف القطر ب د

حيث أنها نقطة واحدة هي ي

ومنها احداثيات ي $(\frac{١+٠}{٢} ، \frac{٣-٢}{٢})$

= ي $(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢})$ باعتبار ي منتصف د ب

وكذلك ي $(\frac{٢-١}{٢} ، \frac{٢-١}{٢})$ = ي $(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢})$ باعتبار ي منتصف أ جـ

اذا كان أ ب جـ د متوازي أضلاع بحيث أ (٤ ، ٠) ، د (١ ، ٣) وكانت هـ$(\frac{٩}{٢} ، \frac{٧}{٢})$ نقطة تقاطع قطرية،

جد طول كل من القطرين أ هـ ، ب د

نجد هـ ب = $\sqrt{(\frac{٩}{٢} - ١)^٢ + (\frac{٧}{٢} - ٣)^٢}$

= $\sqrt{(\frac{٧}{٢})^٢ + (\frac{١}{٢})^٢}$

= $\sqrt{\frac{٤٩}{٤} + \frac{١}{٤}} = \frac{٥}{٤} = \frac{\sqrt{٥٠}}{\sqrt{٤}} = \frac{٢\sqrt{٥}}{٢} = \sqrt{٥}$

ومنها د ب = ٢ × $\sqrt{٥}$ وحدة حيث هـ ب = نصف القطر ب د

نجد أ هـ = $\sqrt{(\frac{٩}{٢} - ٤)^٢ + (\frac{٧}{٢} - ٠)^٢} = \sqrt{\frac{١}{٤} + \frac{٤٩}{٤}} = \sqrt{٥}$

ومنها أ جـ = ٢ × $\sqrt{٥}$ = ٢$\sqrt{٥}$ وحدة

(٤ – ٨) المحل الهندسي ومعادلة الدائرة

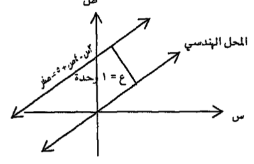
المحل الهندسي Geometric Locus

يرتبط المحل الهندسي بالنقطة المتحركة فقط، فعندما تتحرك نقطة فإنها ترسم مساراً (منحنى) معيناً، هذا المسار أو المنحنى بالذات يسمى المحل الهندسي لتلك النقطة المتحركة.

فالمحل الهندسي هو المنحنى أو المسار الذي ترسمه نقطة متحركة في مستوى تحت شروط معينة.

اذا تحركت النقطة ن(س ،ص) في المستوى الديكارتي، بحيث تبعد وحدة واحدة عن المستقيم الذي معادلته ٣س - ٤ص +٥ = صفر.

وتمر أثناء حركتها بنقطة الأصل و (٠ ، ٠) فإن محلها الهندسي يمكن ايجاده بالكيفية التالية وكذلك معادلته؟



المحل الهندسي للنقطة ن(س ، ص)

هو مستقيم يوازي المستقيم

٣س - ٤ص +٥ = صفر

ويبعد عنه ١ وحدة.

وباستخدام قانون بعد نقطة عن مستقيم، فإن معادلة المحل الهندسي هي

$$ع = \left| \frac{٣س - ٤ص + ٥}{\sqrt{٩ + ١٦}} \right| = ١$$

أي أن $\frac{٣س - ٤ص + ٥}{٥} = ١$

وبالضرب التبادلي ٣س – ٤ص + ٥ = ٥

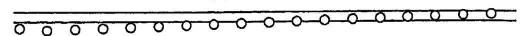
ومنها ٣س - ٤ص = صفر

فمعادلة المحل الهندسي هي علاقة جبرية بين الاحداثيين السيني والصادي للنقطة المتحركة ن (س ،ص).

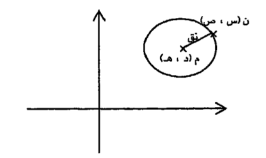
يُعتبر المحل الهندسي كتوطئة مناسبة لإيجاد معادلة الدائرة كما يلي

معادلة الدائرة Equation of Circle

الدائرة هي المحل الهندسي لنقطة تتحرك على بعد معلوم من نقطة ثابتة، وهذا البعد المعلوم يسمى قطر الدائرة نق والنقطة الثابتة تسمى مركز الدائرة م.



ولإيجاد معادلة الدائرة التي مركزها م (د ، هـ) ونصف قطرها نق كما في الشكل



بما أن نق هي المسافة بين

النقطتين ن (س ،ص) ، م (د ،هـ)

فإن نق = $\sqrt{(س - د)^2 + (ص - هـ)^2}$

وبتربيع الطرفين ينتج أن

$(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$

تسمى هذه المعادلة الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها م (د ،هـ) ونصف قطرها نق.

وبفك الأقواس والتربيع

$س^2 - ٢ دس + د^2 + ص^2 - ٢ هـ ص + هـ^2 = نق^2$

وبالترتيب

$س^2 + ص^2 - ٢د س - ٢ هـ ص + د^2 + هـ^2 - نق^2 = صفر$

يسمى المقدار $س^2 + ص^2$ مميز الدائرة وهو الذي يميز معادلة الدائرة عن غيرها من المعادلات.

وبوضع ل = - د ، ك = - هـ ، $د^2 + هـ^2 - نق^2 = جـ$

(للتخلص من الاشارات السالبة) ومنها $نق^2 = د^2 + هـ^2 - جـ$

أي نق = $\sqrt{د^2 + هـ^2 - جـ}$

تصبح معادلة الدائرة $س^2 + ص^2 + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = صفر$ وتسمى الصورة العامة لمعادلة الدائرة.

حيث

"مركزها م(- ل ، - ك) . نق = $\sqrt{ل^2 + ك^2 - جـ}$ "

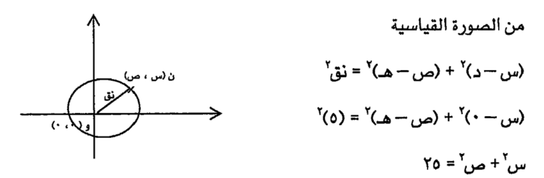
وبإيجاز شديد لمعادلة الدائرة صورتان

الصورة القياسية $(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$ المركز م (د ، هـ)

والصورة العامة $س^2 + ص^2 + ٢ل س + ٢ ك ص + جـ = صفر$ المركز م(- ل، - ك)

ويلاحظ أن معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ = ١ صحيح ونق = $\sqrt{ل^2 + ك^2 - جـ}$.

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل و(٠ ، ٠) ونصف قطرها ٥ وحدات.



من الصورة القياسية

$(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$

$(س - ٠)^2 + (ص - هـ)^2 = (٥)^2$

$س^2 + ص^2 = ٢٥$

وهذه الصورة العامة لمعادلة الدائرة كحالة خاصة عندما مركزها نقطة الأصل.

وبشكل عام. الصورة العامة لمعادلة الدائرة ...؟؟...

$س^2 + ص^2 = نق^2$ عندما مركزها و(٠ ، ٠)

$س^2 + ص^2 + ٢ل س + ٢ ك ص + جـ = صفر$ عندما مركزها م(- ل ، - ك)

عندها نق = $\sqrt{ل^2 + ك^2 - جـ}$.

أوجد معادلة الدائرة في مركزها م(٢ ، - ٣) ونصف قطرها ٦ وحدات.

من الصورة القياسية

(س – د)^{٢} + (ص – هـ)^{٢} = نق^{٢}

(س - ٢)^{٢} + (ص - ٣´)^{٢} = (٦)^{٢}

(س - ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٣٦ وبعد خلو الأقواس والتربيع

س^{٢} - ٤س + ٤ + ص^{٢} + ٦ص + ٩ – ٣٦ صفر

أي أن س^{٢} + ص^{٢} – ٤س + ٦ص – ٢٣ = صفر

(*)

أوجد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها

س^{٢} + ص^{٢} + ٤س + ٦ص - ١٢ = صفر نقارنها بالصورة العامة

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = صفر

ومنها ٢ل = ٤ ⟵ ل = ٢ ⟵ - ل = - ٢

٢ك = ٦ ⟵ ك = ٣ ⟵ - ك = - ٣

وكذلك جـ = - ١٢

المركز م(- ل ، - ك) = م(- ٢ ، - ٣)

نق = $\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - \text{جـ}}$ = $\sqrt{٤ + ٩ + ١٢}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

∴ نصف القطر نق = ٥ وحدات.

(*) هناك طريقة أخرى لحل السؤال تسمى اكمال المربع ستناقش في فصل لاحق من هذا الكتاب "فصل القطوع المخروطية ان أردنا التحديد"

هناك ملحوظتان جديرتان بالاهتمام هما

الملحوظة الأولى

المعادلة $س^2 + ص^2 + 2\,ل\,س + 2\,ك\,ص + جـ = صفر$ لا تمثل دائماً معادلة دائرة (لذا وجب التنويه) دائماً.

(i) اذا كان $ل^2 + ك^2 - جـ > صفر$

فالمعادلة تمثل دائرة نصف قطرها $نق = \sqrt{ل^2 + ك^2 - جـ}$

هل المعادلة $س^2 + ص^2 - 4س + 6\,ص - 3 = صفر$ تمثل دائرة أم لا؟

الجواب بعد البيان التالي

بما أن $2\,ل = -4 \longleftarrow ل = -2$

$2\,ك = 6 \longleftarrow ك = 3$

$جـ = -3$

فإن $ل^2 + ك^2 - جـ = (-2)^2 + 3^2 - (-3) = 16 > صفر$

فالمعادلة تمثل دائرة نصف قطرها $نق = \sqrt{16} = 4$ وحدات

ومركزها $م\,(-ل\,،\,-ك) = م\,(2\,،\,-3)$

(ii) واذا كان $ل^2 + ك^2 - جـ = صفر$

فالمعادلة تمثل نقطة احداثياتها $\{(-ل\,،\,-ك)\}$

هل المعادلة $س^2 + ص^2 - 2س + 6ص + 10 = صفر$ تمثل دائرة أم لا؟

الجواب بعد البيان التالي

بما أن ٢ ل = - ٢ ⟵ ل = - ١

وان ٢ ك = ٦ ⟵ ك = ٣

وان جـ = ١٠

فإن ل^{٢} + ك^{٢} − جـ = (- ١)^{٢} + (٣)^{٢} − ١٠ = صفر

فالمعادلة تمثل نقطة احداثياتها {(- ل ، - ك)} = {(١ ، - ٣)}

(iii) اذا كان ل^{٢} + ك^{٢} − جـ < صفر

فالمعادلة لا تمثل دائرة حتى ولا نقطة وكأنها لم توجد بعد.

وإنما تمثل ϕ = { } المجموعة الخالية.

هل المعادلة س^{٢} + ص^{٢} − ٦ص + ١٣ = صفر تمثل دائرة أم لا؟

الجواب بعد البيان التالي

بما أن ٢ ل = صفر ⟵ ل = صفر

٢ ك = - ٦ ⟵ ك = - ٣

جـ = ١٣

فإن ل^{٢} + ك^{٢} −جـ = (صفر)^{٢} + (- ٣)^{٢} - ١٣ = ٩ - ١٣ = - ٤ < صفر

فالمعادلة لا تمثل دائرة كما لا تمثل نقطة، وإنما تمثل ϕ المجموعة الخالية.

الملحوظة الثانية

جميع نقط المستوى الديكارتي المرسومة فيه الدائرة إما أن تكون واقعة خارج الدائرة أو على محيطها أو داخلها. وهذا واضح من الشكل التالي

فالنقطة ن$_1$ (س$_1$ ، ص$_1$)

تقع خارج الدائرة كون

ف$_1$ > نق (حيث ف$_1$ بعد ن$_1$ عن المركز)

والنقطة ن$_2$ (س$_2$ ، ص$_2$)

تقع على الدائرة (محيطها) كون ف$_2$ = نق (حيث ف$_2$ بعد ن$_2$ عن المركز)

والنقطة ن$_3$ (س$_3$ ، ص$_3$) تقع داخل الدائرة

كون ف$_3$ < نق (حيث ف$_3$ بعد ن$_3$ عن المركز)

وهذا التصيف للنقط يمكن التحقق منه رياضياً من الصورة القياسية لمعادلة الدائرة كما يلي

نجد نق للدائرة أولاً ثم مفوض النقطة المراد تعيين موضعها من الدائرة في الصورة العامة لكن تحت الجذر كما يلي

بما أن $\sqrt{(\text{س} - \text{د})^2 + (\text{ص} - \text{هـ})^2} = \text{نق}$

فإذا كان $\sqrt{(\text{س} - \text{س}_1)^2 + (\text{ص} - \text{ص}_1)^2} > \text{نق}$، فالنقطة ن$_1$ (س$_1$ ، ص$_1$) تقع خارج الدائرة.

وإذا كان $\sqrt{(\text{س} - \text{س}_2)^2 + (\text{ص} - \text{ص}_2)^2} = \text{نق}$، فالنقطة ن$_2$ (س$_2$ ، ص$_2$) تقع على محيط الدائرة.

وإذا كان $\sqrt{(\text{س} - \text{س}_3)^2 + (\text{ص} - \text{ص}_3)^2} < \text{نق}$، فالنقطة ن$_3$ (س$_3$ ، ص$_3$) تقع داخل الدائرة.

كما هو واضح بالشكل.

أين تقع النقط التالية

أ (١ ، ١) ، ب (٠ ، ١) ، جـ (١ ، ١ˉ)

بالنسبة للدائرة التي معادلتها $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + ٤\text{س} + ٢\text{ص} - ٤ = \text{صفر}$

نجد أولاً نق للدائرة

نق $= \sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - \text{جـ}} = \sqrt{(٢)^{٢} + (١)^{٢} - (-٤)} = \sqrt{٤ + ١ + ٤} = \sqrt{٩} = ٣$ وحدات

ومركزها م(- ل ، - ك) = م(- ٢ ، - ١)

نعوض النقطة (١ ، ١) هكذا

$\sqrt{(١ - ٢ˉ)^{٢} + (١ - ١ˉ)^{٢}} = \sqrt{٣^{٢} + ٢^{٢}} = \sqrt{١٣} > ٣$ أي $\sqrt{١٣} >$ نق

فالنقطة خارج الدائرة.

نعوض النقطة (٠ ، ١) هكذا

$\sqrt{(٠ - ٢ˉ)^{٢} + (١ + ١)^{٢}} = \sqrt{٤ + ٤} = \sqrt{٨} < ٣$ فالنقطة داخل الدائرة.

أي $\sqrt{٨} <$ نق

نعوض النقطة (١ ، ٠) هكذا

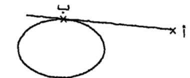
$\sqrt{(١ - ٢ˉ)^{٢} + (- ١ - ١ˉ)} = \sqrt{٣^{٢} + (- ١ +١)^{٢}}$

$= \sqrt{٩ + (\text{صفر})^{٢}} = \sqrt{٩} = ٣ =$ نق

فالنقطة على محيط الدائرة.

ويمكن ايجاد طول المماس المرسوم من نقطة معلومة واقعة خارج الدائرة

كما في الشكل.



حيث أ ب مماس

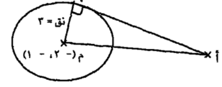
أوجد طول المماس المرسوم من النقطة أ(٣ ، ٢) للدائرة التي معادلتها

س^{٢} + ص^{٢} + ٤س + ٢ص - ٤ = صفر

نحد مركز الدائرة

م (- ل ، - ك) = م(- ٢ ، - ١)

وبما أن نصف القطر عامودي على المماس



∴ المثلث أ ب م قائم الزاوية

وحسب نظرية فيتاغورس.

(أ م)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (م ب)^{٢}

أي (أ م)^{٢} = (مماس)^{٢} + (نق)^{٢}

لكن نق = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - جـ}$

أي نق^{٢} = ل^{٢} + ك^{٢} −جـ = (- ٢)^{٢} + (- ١)^{٢} + ٤ = ٩

أ م البعد بين النقطة ومركز الدائرة.

(أ م) = $\sqrt{(٣ - ٢)^{٢} + (٢ - ١)^{٢}}$ = $\sqrt{٢٥ + ٩}$ = $\sqrt{٣٤}$

وحسب نظرية فيثاغورس

$(أ م)^٢ = (أ ب)^٢ + (م ب)^٢$

$(\sqrt{٣٤})^٢ = (مماس)^٢ + ٩$

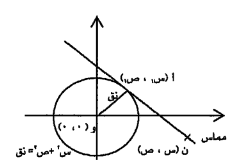
$٣٤ = (مماس)^٢ + ٩$

$-٩ \quad\quad -٩$

$٢٥ = (مماس)^٢$

مماس $= \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدات طول.

وأخيراً يمكن ايجاد معادلة المماس للدائرة $س^٢ + ص^٢ = نق^٢$ عند نقطة التماس $(س_١ ، ص_١)$ الواقعة عليها والمرسوم من نقطة خارجها كما في الشكل



نأخذ أي نقطة مثل ن(س ،ص) على المماس

وبما أن نصف القطر عامودي على المماس.

فإن معادلة المماس وكأنه أي مستقيم

$ص - ص_١ = م (س - س_١)$

نجد أولاً احداثيات نقطة التماس

$م_{المماس} \times م_{نصف القطر} = -١$ كون المماس ونصف القطر متعامدان.

والعكس صواب

م نصف = $\frac{\text{فرق الصادين}}{\text{فرق السينين}}$ = $\frac{ص_1 - ٠}{س_1 - ٠}$ = $\frac{ص_1}{س_1}$

∴ م المماس × ($\frac{ص_1}{س_1}$) = - ١

ومنها م مماس = $\frac{- س_1}{ص_1}$

أي أن م المماس = $\frac{- س_1}{ص_1}$ حيث (س$_1$ ، ص$_1$) نقطة التماس

ومعادلة المماس تكون س س$_1$ + ص ص$_1$ = نق^2 الحل(مباشرة)

أوجد معادلة المماس للدائرة س^2 + ص^2 = ١٣

عند النقطة أ (٢ ، - ٣) نقطة التماس.

م مماس = $\frac{- س_1}{ص_1}$ = $\frac{- ٢}{- ٣}$ = $\frac{٢}{٣}$

معادلة المماس

(ص – ٣ً) = $\frac{٢}{٣}$ (س - ٢) لأن المماس يمر بنقطة التماس أيضاً وكأنها نقطة يمر بها.

ص + ٣ = $\frac{٢}{٣}$ س – $\frac{٤}{٣}$

ص = $\frac{٢}{٣}$ س - $\frac{٤}{٣}$ - ٣

ص = $\frac{٢}{٣}$ س - $\frac{١٣}{٣}$

ويمكن ايجاد معادلة المماس مباشرة من القانون

س س$_1$ + ص ص$_1$ = نق^2

أي س (٢) + ص (- ٣) = ١٣

٢س - ٣ص = ١٣ ⟵ $\frac{- ٣ص}{- ٣}$ = $\frac{- ٢س}{- ٣}$ + $\frac{١٣}{- ٣}$

ص = $\frac{٢}{٣}$ - $\frac{١٣}{٣}$ نفس الجواب

(٤- ٩) أمثلة محلولة على الهندسة التحليلية

مثال (١):

احسب المسافة بين النقطتين أ (- ٢ ، ٦) ، ب(٤ ، ٨)

البعد =

أ ب $= \sqrt{(-٢ - ٤)^{٢} + (٦ - ٨)^{٢}} = \sqrt{(-٦)^{٢} + (-٢)^{٢}} = \sqrt{٣٦ + ٤} = ٤٠$

∴ أ ب $= \sqrt{٤ \times ١٠} = ٢\sqrt{١٠}$ وحدة طول.

مثال (٢):

ماقيمة س لتكون النقطة جـ (س، $\frac{٩}{٢}$) هي منتصف القطعة أ ب حيث أ(٢ ، ٣) ، ب(٤ ، ٦)

بما أن جـ (س ، $\frac{٩}{٢}$) هي منتصف

أ ب فإن:

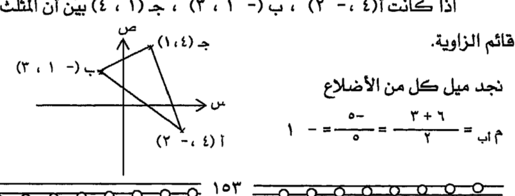
$$س = \frac{٤ + ٢}{٢} = \frac{٦}{٢} = ٣$$

$$\frac{٩}{٢} = \frac{٦ + ٣}{٢} = \frac{٩}{٢}$$

س = ٣ ص° تكون جـ(س ، $\frac{٩}{٢}$) منتصف أ ب.

مثال (٣):

اذا كانت أ(٤ ، - ٢) ، ب (- ١ ، ٣) ، جـ (١ ، ٤) بيّن أن المثلث أ ب جـ قائم الزاوية.



نجد ميل كل من الأضلاع

$$م_{اب} = \frac{٦ + ٣}{٢} = \frac{-٥}{٥} = - ١$$

$م_{بجـ} = \frac{٤ - ٣}{٤ - ١} = \frac{١}{٢}$

$م_{أجـ} = \frac{٤ - ٢}{١ - ٤} = \frac{٦}{-٣} = -٢$

بما أن $م_{بجـ} \times م_{أجـ} = (\frac{١}{٢})(-٢) = -١$

فإن ب جـ $\underset{يعامد}{\perp}$ أ جـ

∴ ∢ جـ قائمة ∴ أ ب جـ قائم الزاوية في ∢ جـ.

مثال (٤):

بيّن أن الشكل الذي رؤوسه النقط أ (٢ ، - ١)

ب (- ١ ، ١)

جـ (٢ ، ٣)

د (٥ ، ١) هو معين وأوجد مساحته.

نجد أطوال أضلاعه أولاً:

جـ (٢، ٣)

د (٥، ١)

ب (- ١ ، ١)

أ (٢ ، - ١)

أ ب = $\sqrt{(٢ + ١)^٢ + (١ + ١)^٢} = \sqrt{١٣}$

ب جـ = $\sqrt{(- ١ - ٢)^٢ + (١ - ٣)^٢} = \sqrt{١٣}$

جـ د = $\sqrt{(٢ - ٥)^٢ + (٣ - ١)^٢} = \sqrt{١٣}$

د أ = $\sqrt{(٢ - ٥)^٢ + (- ١ - ١)^٢} = \sqrt{١٣}$

فأضلاعه الأربعة متساوية فهو معين (كون المعين شكل رباعي أضلاعه متساوية)

وتأكد على ذلك بإيجاد أقطاره:

ب د = $\sqrt{(٥ + ١)^٢ + (١ - ١)^٢} = ٦$

أ جـ = $\sqrt{(٢ - ٢)^٢ + (- ١ - ٣)^٢} = ٤$

مساحة المعين = $\frac{١}{٢} \times ٦ \times ٤ = ١٢$ وحدة مربعة.

مثال (٥):

باستخدام فكرة الميل بيّن أن النقط أ (٢ ، ٠) ، ب (− ٢، − ٢) ، جـ (٦ ، ٤) على استقامة واحدة (تسمى نقط مستقيمة).

نجد $م_{أب} = \frac{-٢ - ١}{-٢ - ٢} = \frac{-٣}{-٤} = \frac{٣}{٤}$

ونجد $م_{أجـ} = \frac{٤ - ١}{٦ - ٢} = \frac{٣}{٤}$

∴ أ ب // أ جـ (كون ميلاهما متساويين)

وهذا مستحيل كونهما مشتركان في نقطة واحدة.

∴أ ب ، أ جـ منطبقان على بعضهما البعض.

∴ أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة.

مثال (٦):

أوجد ميل من المستقيمات التي معادلاتها:

(i) ٢س − ٤ص = ٥ (ii) س + ٣ص = صفر

نضع كل معادلة على الصورة: ص = م س + جـ حيث م ميل المستقيم

٢س − ٤ص = ٥

− (− ٤ ص = − ٢س +٥)

$\frac{٤ ص}{٤} = \frac{٢ س}{٤} - \frac{٥}{٤}$

ص = $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{٥}{٤}$

∴ ميله = $\frac{١}{٢}$

٢س + ٣ ص = صفر

$\frac{٣ ص}{٣} = \frac{-٢ س}{٣}$

س = $\frac{-٢ ص}{٣}$

ميله = − $\frac{٢}{٣}$

مثال (٦):

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة أ(- ١ ، ٢) ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات طولاً مقداره ٣

والشكل يبين بأن المستقيم يمر بالنقطة

أ (- ١ ، ٢) ، ب(٠ ، - ٣)

$$م_{اب} = \frac{-٣ - ٢}{٠ + ١} = \frac{-٥}{١} = -٥$$

المعادلة:

$ص - ص_١ = م_{المستقيم} (س - س_١)$

وبأخذ النقطة أ (- ١ ، ٢)

ص - ٢ = - ٥ (س - ١)

ص - ٢ = - ٥س - ٥

ص = - ٥س - ٥ +٢

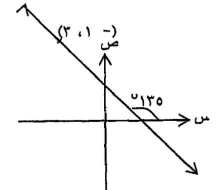
ص = - ٥س - ٣	معادلة المستقيم

مثال (٧):

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة أ (- ١ ، ٣) والذي يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع محور السينات الموجب.

$م_{المستقيم} = ظا ١٣٥^\circ = ظا (١٨٠^\circ - ٤٥^\circ) = - ظا ٤٥^\circ = - ١$

∴ المعادلة:



ص - ٣ = - ١(س +١)

ص - ٣ = - ١س - ١

ص = - ١س - ١ + ٣

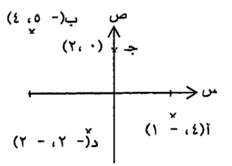
ص = - ١س + ٢

مثال (٨):

عيّن النقطة التالية في المستوى الديكارتي:

أ (٤ ، - ١) ، ب(- ٥ ، ٤) ، جـ (٠ ، ٢) ، د(- ٢ ، - ٢)

الحل:



مثال (٩):

اذا كانت النقط أ (١ ، ٥)، ب(٤ ، ٨) ، جـ(٣ ، ١) هي ثلاث رؤوس لمتوازي الأضلاع أ ب جـ د أو احداثيات الرأس د.

لإيجاد الرأس د(س ، ص) نقول:

النقطة ي ملتقى قطريه

وتنصف كل منهما.

بما أن ي منصف أ جـ فإن احداثيات ي هي:

$$ي \left(\frac{٣ + ١}{٢} ، \frac{١ + ٥}{٢}\right) = ي (٢ ، ٣)$$

وبما أن ي منصف ب د فإن احداثيات ي هي:

$$٢ = \frac{٤ + س}{٢} ، \quad ٣ = \frac{٨ + ص}{٢}$$

ومنها ٤ + س = ٤ ، ٨ + ص = ٦

س = صفر ص = - ٢

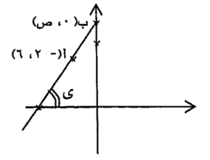
فاحداثيات الرأس د (صفر ، - ٢)

مثال (١٠):

مستقيم يمر بالنقطة أ(- ٢ ، ٦) وميله ٤

أوجد احداثيات نقطة تقاطعه مع محور الصادات

بما أن الميل = ٤ موجب فالزاوية ي حادة للرسم فقط.



$$م_{اب} = \frac{ص - ٦}{٠ - -٢} = ٤$$

$$\frac{ص - ٦}{٢} = \frac{٤}{١}$$

$$ص - ٦ = ٨$$

$$ص = ١٤$$

∴ يقطع محور الصادات في النقطة ب (٠ ، ١٤)

مثال (١١):

اذا كانت أ (٠ ، ٠) ، ب (٢ ، ٥) ، جـ (- ١ ، ١) رؤوس مثلث أ ب جـ وكانت النقط د ، هـ ، جـ منصفات أضلاعه أ ب ، ب جـ ، جـ أ على التوالي، احسب محيط المثلثين أ ب جـ ، د هـ و.

نجد أطوال أ ب ، ب جـ ، جـ أ هكذا:

$$أ ب = \sqrt{(٢ - ٠)^٢ + (٥ - ٠)^٢} = \sqrt{٢٩}$$

$$ب جـ = \sqrt{٣^٢ + ٤^٢} = \sqrt{٢٥} = ٥$$

$$أ جـ = \sqrt{(-١)^٢ + (١)^٢} = \sqrt{٢}$$

$$محيط أ ب جـ = \sqrt{٢٩} + \sqrt{٢} + ٥ =$$

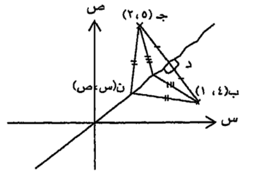
٥,٣ + ١,٤ + ٥ = ١١,٧ سم تقريباً.

محيط د هـ و = $\frac{١}{٢}$ محيط أ ب جـ (حيث د هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ، و د = $\frac{١}{٢}$ أ جـ ، و هـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب)

∴ محيط د هـ و = $\frac{١}{٢}$ (١١,٧) = ٥,٩ سم . تقريباً.

مثال (١٢):

أوجد المحل الهندسي ومعادلته لنقطة تتحرك على بعدين متساويين من النقطتين أ(٢ ، ٥) ، ب (٤ ، ١).



المحل الهندسي هو المستقيم الواقع بين النقطتين، والعامود المنصف للبعد بينهما (من الرسم) حيث ب د = د جـ البعدان متساويان. وأما معادلته:

ب ن = ن جـ

أي أن $\sqrt{(٤ - س)^2 + (١ - ص)^2} = \sqrt{(٢ - س)^2 + (٥ - ص)^2}$ وبتربيع الطرفين

$(٤ - س)^2 + (١ - ص)^2 = (٢ - س)^2 + (٥ - ص)^2$ وبعد فك الأقواس والترتيب

س − ٢ ص + ٣ = صفر معادلة المحل الهندسي.

مثال (١٣):

أوجد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها:

$\frac{٢س^2 + ٢ص^2 - ١٢س = ١٤}{٢}$ نجعل معاملي $س^2$ ، $ص^2$ الوحدة أي نقسم على ٢ جميع الأطراف.

$س^2 + ص^2 - ٦س = ٧$

$س^2 + ص^2 - ٦س + صفر ص - ٧ = صفر$ نقارنها بالصورة العامة

$س^2 + ص^2 + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = صفر$

عندها ٢ ل = - ٦ ⟵ ل = - ٣

٢ك = صفر ⟵ ك = صفر

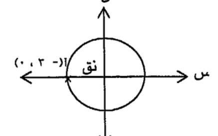
جـ = - ٧

م (- ل، - ك) = ٣ (٣ ، ٠)

نق = $\sqrt{ل^2 + ك^2 - جـ} = \sqrt{٩ + صفر + ٧} = \sqrt{١٦} = ٤$ وحدات.

مثال (١٤):

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل و(٠ ، ٠) وتمر بالنقطة أ(- ٣ ، ٠) معادلة الدائرة التي تمر بنقطة الأصل هي:



س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢} ولإيجاد نق للدائرة نحقق النقطة

∴ (- ٣)^{٢} + (٠)^{٢} = نق^{٢}

نق^{٢} = ٩

نق = $\sqrt{٩}$ = ٣ وحدات.

∴ معادلة الدائرة = س^{٢} + ص^{٢} = ٩

مثال (١٥):

أوجد معادلة الدائرة التي نهايتا قطرٍ فيها هما النقطتان أ(٧، ١٢) ، ب(- ٥ ، - ٤).

نجد احداثيات المركز م

م منتصف أ ب

احداثيات م $\left(\frac{٧ - ٥}{٢} ، \frac{٧ - ٤}{٢}\right)$

م $\left(\frac{٤}{٢} ، \frac{٨}{٢}\right)$ ، م(٢ ، ٤) المركز

نجد نق = $\sqrt{(٧ - ٢)^{٢} + (١٢ - ٤)^{٢}}$ = $\sqrt{٢٥ + ٦٤}$ = $\sqrt{٨٩}$

معادلة الدائرة:

$$(س - ٢)^٢ + (ص - ٤)^٢ = (\sqrt{٨٩})^٢$$

$$س^٢ - ٤س + ٤ + ص^٢ - ٨ص + ١٦ - ٨٩ = صفر$$

$$س^٢ + ص^٢ - ٤س - ٨ص - ٦٩ = صفر$$

مثال (١٦):

جد بعد النقطة أ (- ١ ، - ٣) عن المستقيم الذي معادلته:

$$ص = \frac{-٣}{٤} س - \frac{٣}{٢}$$

نجعل صورة معادلة المستقيم على الشكل أ س + ب ص + جـ = صفر

هكذا $٤(ص = \frac{-٣}{٤} س - \frac{٣}{٢})$

$$٤ ص = - ٣ س - ٦$$

$$\therefore ٣ س + ٤ ص + ٦ = صفر$$

$$البعد = \left| \frac{٣(-١) + ٤(-٣) + ٦}{\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}} \right| = \left| \frac{-٣ - ٤ + ٦}{\sqrt{٢٥}} \right|$$

$$= \frac{|-١|}{٥} = \frac{١}{٥} \text{ وحدة.}$$

مثال (١٧):

جد البعد بين المستقيمين المتوازيين اذا كانت معادلة الأول س - ٥ ص =٧

ومعادلة الثاني س - ٥ ص = ١١.

الحل: نعيّن نقطة مثل ن على المستقيم الأول ويوضع ص = صفر

س - ٥ (٠) = ٧

س = ٧

∴ النقطة ن (٧ ، ٠)

س - ٥ص = ٧

ن (٧ ، ٠)

س - ٥ص = ١١

وبعدها من المستقيم س − ٥ ص = ≠ صفر

بعد أن نجعل معادلة المستقيم الثاني على صورة أ س + ب ص + جـ = صفر

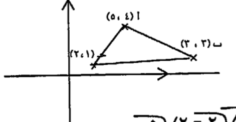
س − ٥ ص − ١١ = صفر.

هكذا..

$$\text{البعد} = \left| \frac{١(٧) - ٥(٠) - ١١}{\sqrt{١^{٢} + (-٥)^{٢}}} \right| = \left| \frac{٧ - \text{صفر} - ١١}{\sqrt{٢٦}} \right| = \frac{٤}{\sqrt{٢٦}} \quad \text{وحدة طول.}$$

مثال (١٨):

ما نوع المثلث الذي رؤوسه أ (٤ ، ٥) ، ب (٨ ، ٣) ، جـ (٢ ، ١) من حيث الأضلاع؟



نجد أطوال أضلاعه كما يلي:

$$أ ب = \sqrt{(٨ - ٤)^{٢} + (٣ - ٥)^{٢}} = \sqrt{١٦ + ٤} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$$

$$ب جـ = \sqrt{(٨ - ٢)^{٢} + (٣ - ١)^{٢}} = \sqrt{٣٦ + ٤} = \sqrt{٤٠} = ٢\sqrt{١٠}$$

$$أ جـ = \sqrt{(٤ - ٢)^{٢} + (٥ - ٠)^{٢}} = \sqrt{٤ + ١٦} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$$

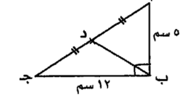
وبما أن أ ب = أ جـ

فإن المثلث أ ب جـ متساوي الساقين.

مثال (١٩):

اذا كان المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب وفيه أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ١٢سم

واذا كانت النقطة د منصف أ جـ فما طول د ب؟



ب د = $\frac{١}{٢}$ أ جـ (واصلة من القائمة الى منصف الوتر)

لكن $(أ\ جـ)^{٢} = (أ\ ب)^{٢} + (ب\ جـ)^{٢}$

$= (٥)^{٢} + (١٢)^{٢} = ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩$

∴ أ جـ = ١٣

ومنها ب د = $\frac{١٣}{٢} = ٦\frac{١}{٢}$ سم.

مثال (٢٠):

باستخدام فكرة الميل ما اسم الشكل الرباعي أ ب جـ د الذي رؤوسه:

أ (- ١ ، - ١) ، ب (١ ، ١) ، جـ (٥ ، ٩) ، د (- ٣ ، ١) ؟

الرسم لا يوحي باسمه كونه غير دقيق:

نجد الميل لكل من:

$م_{ب جـ} = \frac{٩ - ١}{٥ - ١}$

$= \frac{٨}{٤} = ٢$

$م_{اد} = \frac{-٣+١}{٠+١} = \frac{-٢}{١} = -٢$

$م_{جد} = \frac{٩-١}{٥+٣} = \frac{٨}{٨} = ١$

بما أن $م_{اب} = م_{جد}$

$\therefore$ أ ب $\parallel$ جـ د

فالشكل شبه منحرف كون فيه ضلعان متقابلان فقط متوازيان.

(٤- ١٠) أسئلة وتدريبات وقوانين تتطلب حلولاً من الدارسات والدارسين

(١) هل المستقيمان: ص = ٢س - ٣

س + ٢ ص = ٥

متوازيان أم متعامدان أم لا هذا ولا ذاك؟

{متعامدان}

(٢) اكتب معادلة الخط المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ١٢٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ومقطعه الصادي = ٣

{ص = - $\sqrt{٣}$ س + ٣}

استعن بالرسم.

(٣) بيّن أن المستقيمين متعامدين:

$ل_١$: ٢ س – ٨ ص = ٣

$ل_٢$: ص = ٥ - ٤ س.

(٤) أي من المستقيمات التالية متوازية:

(١) ٦ س - ٢ ص = ٣

(٢) ص - س = ٢

(٣) ص = ٣ س – $\frac{٣}{٢}$

(٤) ص = ٣ س + ٦

{ الأول // الثاني }

(٥) احسب المسافة بين النقطتين أ(٣ ، ٤) ، ب (- ٢ ، ١)

{$\sqrt{٣٤}$}

(٦) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين أ(٢ ، ٣) ، ب (٤ ، ٧)

{ص = ٢ س - ١}

(٧) أوجد ميل المستقيم الذي معادلته ٢٠ س – ٢٤ ص – ٣٠ = صفر

{ $\frac{٥}{٦}$ }

(٨) أوجد المقطع الصادي للمستقيم الذي معادلته وكذلك السيني ٣ س + ٢ ص = ٦

{ ٣ ، ٢ }

(٩) ما نوع المثلث أ ب جـ الذي رؤوسه أ(٢ ، ١)، ب (- ٤ ، ٣) ، جـ (٥ ، - ٤)؟

والشكل الرباعي الذي رؤوسه أ (٣ ، ١) ، ب (- ٣، ١) ، جـ (٣ ، - ٥) د(- ٧ ، ٠)؟

(١٠) أ ب جـ مثلث رؤوسه أ (١ ، ٥) ، ب (٩ ، ٦) ، جـ (٠ ، ١٣) احسب اطوال أضلاعه ومساحته أيضاً.

(١١) بيّن أن المثلث أ ب جـ الذي رؤوسه أ (٢، - ١) ، ب (٤ ، ٣) ، جـ (٨ ، - ٤) قائم الزاوية.

(١٢) أوجد ميل كل من المستقيمات التي معادلاتها:

(١) ٢س - ٣ = صفر { غير معرف }

(٢) ٤ ص + ٥ = صفر { صفر }

(١٣) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة (- ٣ ، ٢) والموازي للمستقيم ٤س - ٥ ص + ٨ = صفر.

{ ص = $\frac{٣}{٥}$ س + $\frac{١٩}{٥}$}

(١٤) احسب المسافة بين النقطتين أ ($\sqrt{٢}$ ، ١) ، ب ($\sqrt{٣}$ ، ٢)

{$\sqrt{٦}$ - ٢$\sqrt{٦}$}

(١٥) اكتب معادلة المستقيم الذي:

(١) يمر بالنقطتين أ (- ٢ ، ٤) ، ب (- ١ ، ٣) {ص = - س + ٢ }

(٢) يمر بالنقطة أ ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) وميله = - ١ {ص = - س + ١ }

(٣) ميله = ٣ ومقطعه الصادي = - ٣ {ص = ٣ س – ٣ }

{ارشاد: يمر بالنقطة (٠ ، - ٣) }

(١٦) أوجد الميل والمقطع الصادي للمستقيم الذي معادلته ص = ٢(س+ ٣) + ١

{ ٢ ، ٧ }

{ ارشاد: نضع المعادلة على الصورة ص = م س + جـ }.

(١٧) بيّن أن المثلث أ ب جـ الذي رؤوسه:

أ (- ١ ، ٢)

ب (٣- ١ ، ٣)

جـ (- ١ ، ٤)

متطابق (متساوي) الأضلاع.

{ ارشاد: استعن بقانون المسافة بين نقطتين }.

(١٨) أوجد الزاوية التي يصنعها المستقيم الذي معادلته ٣ س - ٤ ص+ ٢ = صفر مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

{ارشاد: اجعل معادلة المستقيم على الشكل ص = م س + جـ}

{ ظا هـ = ٠،٧٥٠٠ ، ∠ هـ = ٣٧° تقريباً }

(١٩) أي من النقط التالية تقع على محيط الدائرة $س^٢ + ص^٢ = ٤١$

(٥ ، ٥) ، (٤ ، ٥) ، (- ٣ ، - ٤) ؟

{ (٥ ، ٥) }

(٢٠) اكتب معادلة المستقيم الذي يضع زاوية قياسها - ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ومقطعه الصادي = - ٣.

{ص = - س - ٣ }

(٢١) اذا كانت النقط أ (٢ ، ٣) ، ب (- ٢ ، ٧) ، جـ (١ ، ٤)، هل تقع النقطة جـ (١ ، ٤) على القطعة المستقيمة أ ب أم لا؟

{ ارشاد: لا تعتمد على الرسم فقط }

(٢٢) أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة أ (٢ ، ٣) و:

(١) يمر بنقطة الأصل (٢) يعامد المستقيم س – ص = صفر

(٣) يوازي محور السينات (٤) مقطعه الصادي - ٥

(٢٣) كم يقطع المستقيم ٣ س + ٧ ص = ١ من المحورين، ثم احسب ميله بعد ذلك.

{ $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٧}$ ، - $\frac{٣}{٧}$ }

(٢٤) بيّن أن النقط أ (٥ ، ٢) ، ب (٣ ، - ١) ، جـ (٠ ، ١) ، د (٢ ، ٤) رؤوس مربع.

{ ارشاد: المربع شكل رباعي أضلاعه متطابقة وزواياه قوائم}.

(٢٥) اذا كانت النقط أ (٣ ، ٢) ، ب (٥ ، ص) ، جـ (٢ ، ١) ، د (٣ ، - ٢) ، ما قيمة ص اذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ (يعامد) $\overleftrightarrow{جـ د}$

{ $\frac{٨}{٣}$ }

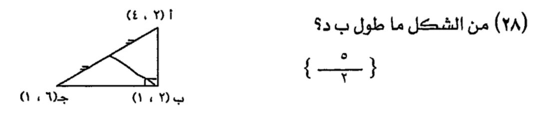
(٢٦) ما البعد بين المستقيمين المتوازيين $\overleftrightarrow{ل_{١}}$: ٨ س – ٦ ص = - ٤

$\overleftrightarrow{ل_{٢}}$: ٤ س – ٣ ص = ١

(٢٧) أيهما أقرب للمستقيم ٦ س + ٨ ص = ٢١ النقطة أ (- ٢ ، ١) أم النقطة ب (- ٤ ، ٤)؟

{دون الاعتماد على الرسم فقط}

(٢٨) من الشكل ما طول ب د؟



{ $\frac{٥}{٢}$ }

(٢٩) من الشكل ما طول أ ب اذا كان المثلث أ ب جـ متساوي الساقين؟

{ ارشاد: صل هـ د }



(٣٠) اذا كانت النقط أ (- ١ ، ٣) ، ب (١ ، ٥) ، جـ (٣ ، ٤) ، د (س ، ٦)، ما قيمة س ليصبح المستقيم أ ب // المستقيم جـ د.

{ ٧ }

(٣١) أين تقع النقطة (١ ، ٠) داخل الدائرة ٢س^{٢}+ ٢ص^{٢} - ٩س +١٠ص - ١٨= صفر أم خارجها أم على محيطها؟

{ داخلها }

(٣٢) اذا كان ميل المستقيم أ ب يساوي $\frac{١}{٣}$ وكانت أ(- ٣، - ٢) ، ب(١، ل) أوجد قيمة ل.

(٣٣) ما معادلة المستقيم الذي زاوية ميله ١٢٠° ويمر بالنقطة (٢، $\sqrt{3}$)

{ص = - $\sqrt{3}$ س + ٣ $\sqrt{3}$ }

(٣٤) أوجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ الذي يمر بنقطة الأصل ويعامد المستقيم ص + س = - ٥.

(٣٥) أوجد معادلة محور الصادات. { س = صفر }

(٣٦) ما قيمة أ التي تجعل المستقيم ص = (أ +١)س + ٢ افقياً؟ { - ١ }

{ ارشاد : المستقيم الأفقي ميله = صفر }

(٣٧) اذا علمت أن زاوية ميل المستقيم $ل_1$ = ١٥٠° وزاوية ميل المستقيم $ل_2$ = ٦٠°
فهل المستقيمان $ل_1$ ، $ل_2$ متوازيان أم متعامدان؟

(٣٨) أيهما أبعد عن المستقيم ٥س - ١٢ ص = صفر النقطة أ (٤ ،٥) أم النقطة ب (٥، ٤)؟

{ارشاد : لا تعتمد على الرسم فقط }

(٣٩) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ(- ٢ ،٤) ، ب (٢ ، - ١) ثم أوجد القطعة أ ب ، وميل المستقيم $\overleftrightarrow{أ ب}$.

(٤٠) ما الشكل الهندسي الذي رؤوسه النقط؟

أ (٠ ،٢) ، ب (٢ ،٢) ، جـ(٢ ،٤) ، د (٠ ،٤) { مربع }

{ ارشاد : أوجد أطوال أضلاعه وقياسات زواياه }

(٤١) هل النقط أ (- ١ ،١) ، ب(٢ ،٠) ، جـ (- ٣ ،٥) تقع على خط مستقيم واحد ، كيف؟

{ ارشاد : استعن بالميل أو الأطوال }

(٤٢) بيّن أن النقط أ (٠ ، ٣) ، ب (٥ ، - ٢) ، جـ (١٢ ، - ١) ، د (٧ ، ٤) هي رؤوس معين.

{ ارشاد : المعين متوازي أضلاع، أضلاعه متساوية وأقطاره متعامدة }

(٤٣) أوجد مساحة المثلث الذي تكونه المنطقة المحدودة بالمحورين والمستقيم ٤س - ٥ص = ٢٠.

(٤٤) اذا كانت معادلة الخط المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ هي:

(أ + ١) س + أ ص = أ - ١ حيث أ عدد حقيقي

أوجد: (١) قيمة أ التي تجعل المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ // محور السينات

(٢) قيمة أ التي تجعل المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ يمر بنقطة الأصل

(٣) قيمة أ التي تجعل المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ ⊥ المستقيم الذي معادلته س - ٢ص = ٥

(٤٥) بيّن أن الدائرة $س^٢ + ص^٢ + ٢س - ٢ ص = صفر$

$س^٢ + ص^٢ + ٤ س - ١٦ص + ٣٦ = صفر$

متماستان من الخارج.

{ ارشاد : عندما خط المركزين = $نق_١ + نق_٢$ بالضبط }

(٤٦) بيّن أن المثلث أ ب جـ الذي رؤوسه أ (- ١ ، - ٣) ، ب (٦ ، ١) ، جـ(٢ ، ٥) قائم الزاوية ثم احسب مساحته.

{ ١٣ }

(٤٧) أوجد معادلة العامود المنصف للقطعة المستقيمة أ ب حيث أ(١ ، ٧)، ب(- ٣ ، ٢).

{ص = $\frac{-٤}{٥}$ س + $\frac{٣٧}{١٠}$ }

(٤٨) صنّف أزواج المستقيمات التالية الى متوازية، متعامدة، لا هذه ولا تلك:

(١) ص − ٢س = ٣ ، ص + $\frac{١}{٢}$ س = − ١

(٢) س − ص = − ١ ، س = ص

(٣) ٢س + ٣ ص = ١ ، ٣ س + ٢ ص = ٢

(٤٩) أوجد معادلة الخط المستقيم الذي:

(١) يمر بالنقطة (١ ، ١) وميله = ٥

(٢) يمر بالنقطتين(٢ ، − ٣) ، (٣ ، − ٢)

(٣) يمر بالنقطة (− ١ ، ٠) ويوازي المستقيم ص = ٣س − ١

(٤) يمر بالنقطة (٢ ، ٣) ويُعامد المستقيم ٢س + ٣ ص = ٦

(٥) يقطع من محور السينات ٣ وحدات.

ويقطع من محور الصادات − ٥ وحدات.

(٥٠) اذا كانت ص = ٢ س + ٦ تمثل معادلة خط مستقيم، وكانت النقطة (٣ ، $ص_١$) ومدى نقط هذا المستقيم ما قيمة $ص_١$؟

(٥١) كم وحدة يقطع المستقيم ٣ س + ٦ ص − ١٢ = صفر من محور الصادات ومن محور السينات؟

(٥٢) مثّل معادلة الخط المستقيم ص = − ٢ س + ٥ على المستوى الديكارتي.

(٥٣) اكتب معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢).

(٥٤) أوجد بعد النقطة (٠ ، ١) عن المستقيم ص = ٢ س − ١

(٥٥) احسب مساحة المثلث أ ب جـ الذي رؤوسه أ(١ ، ٠) ، ب(٥ ، ٠) ، جـ(٤ ، ٢).



التحليل الى العوامل

Factorization

(٥ - ١) الحدود والمقادير الجبرية

لما كانت الرياضيات أعداداً ورموزاً واشارات، كان ولا يزال البناء الجبري لها يُشيد من مُسميات هي الحدود الجبرية Terms فالحد الجبري يتكون من حاصل ضرب عدد ثابت بمتغير أو أكثر مثل:

٥ س ، - ٤ ص ، ٣ أ ب جـ وهكذا:

هذا ويسمى العدد الثابت مُعامل الحد الجبري والمتغيرات تسمى القسم الرمزي:

فالحد الجبري $-\frac{٢}{٣}$ ص^{٢} ، معاملة العدد $-\frac{٢}{٣}$ وقسمه الرمزي ص^{٢}

والحد الجبري ٨ س ، معامله العدد ٨ وقسمه الرمزي س

ثم الحد الجبري $\sqrt{٣}$ س^{٢} ص ع، معامله العدد $\sqrt{٣}$ وقسمه الرمزي س^{٢} ص ع وهكذا

وأما المقدار الجبري فيتكون من حدود جبرية مرتبطة مع بعضها البعض بعمليات الجمع أو الطرح أو كليهما مثل:

٣ س + ٢ ص ، ٥ ك - س ، س + ص - ٧ ع وهكذا.

وهذا لا يمنع من أن يتكون المقدار الجبري من حد واحد فقط، كأن يقال بأن ٥ س هو حد جبري وبنفس الوقت مقدار جبري مكون من حدٍ واحد.

كما لا يمنع من أن يتكون الحد الجبري من عدة حدود جبرية ان جاز التعبير ولكن بوضعها بين حاصرتين أو قوسين كما يلي:

ان ٥ س + ٤ ص مقدار جبري

ولكن (٥س + ٤ ص) بوجود القوسين أصبح وكأنه حد واحد:

أي يُعامل معاملة الحد الجبري أيضاً.

فالعبارات الجبرية Algebrical Expression:

إما أن تكون حدود جبرية أو مقادير جبرية أو مقادير جبرية تعامل كحدود جبرية مثل:

س ص حد جبري أو مقدار جبري مكون من حدٍ واحد.

س + ص مقدار جبري مكون من حدين.

(س – ص) مقدار جبري يعامل كأنه حد جبري نتيجة لوجود الأقواس.

قاعدة هامة:

"الحدود الجبرية المتشابهة تجمع وتطرح وغير المتشابهة فلا تجمع ولا تطرح"

والحدود الجبرية المتشابهة هي الحدود التي لها القسم الرمزي نفسه وإن اختلفت معاملاتها:

فالحدود ٥ س^{٢} ، – ٨ س^{٢} ، ٤ س^{٢} حدود متشابهة

وكذلك الحدود أ ب ، – ٣ أ ب ، ١٤ أ ب حدود متشابهة

وأما الحدان ٥ س^{٢} ، ٥ س^{٣} غير متشابهين لاختلاف القسم الرمزي فيهما (نتيجة تباين الأسس فيهما)

والحدين ٣ س ص ، ٤ س ع غير متشابهين لاختلاف القسم الرمزي فيهما (نتيجة تباين الرموز فيهما)

مثال:

جد ناتج جمع الحدود الجبرية المتشابهة فيما يلي:

٨ س ك ، ٧ ك ، ٥ ع م^{٣} ، – ٣ س ك ، ٤ ك^{٤} ، ٢ س ك ، – ١١ ل^{٤} ، ع م^{٣}

الحل:

٨ س ك – ٣ س ك + ٢ س ك (كون المعاملات هي التي تجمع)

٧ ل^{٤} + ٤ ل^{٤} – ١١ ل^{٤} = صفر

٥ ع م^{٣} + ١ع م^{٣} = ٦ ع م^{٣}

يجب أن ننوه وفي هذا السياق أنه يمكن استبدال الرموز الجبرية في الحدود أو المقادير بأعداد رقمية كما في هذا المثال:

مثال:

جد القيمة العددية لكل من الحدود والمقادير الجبرية عندما:

س = ٥ ، ص = - ٣ ، ع = ٦

٧ س ع = (٧) (٥) (٦) = ٢١٠

س^{٢} + ص^{٢} = (٥)^{٢} + (- ٣)^{٢} = ٢٥ + ٩ = ٣٤

$\frac{١}{٢}$ ع = ($\frac{١}{٢}$) (٦) = ٣

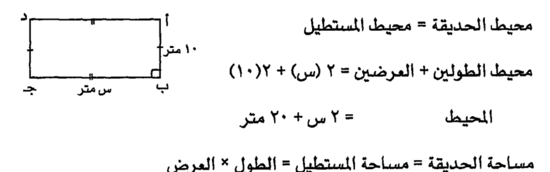
س^{٢} + ٢ س ص − ع^{٢} = (٥)^{٢} + (٢) (٥) (- ٣) − (٦)^{٢}

= ٢٥ − ٣٠ − ٣٦

= - ٤١

مثال:

حديقة منزل على شكل مستطيل طولها س م وعرضها ١٠م اكتب التعبير الجبري لمحيطها ومساحتها.



محيط الحديقة = محيط المستطيل

محيط الطولين + العرضين = ٢ (س) + ٢(١٠)

المحيط = ٢ س + ٢٠ متر

مساحة الحديقة = مساحة المستطيل = الطول × العرض

المساحة = (س) (١٠) = ١٠ س متراً مربعاً.

(٥- ٢) قانون التوزيع Distributive Law:

عند ايجاد حاصل ضرب حد جبري بآخر يتم ضرب معامل الحد الأول بمعامل الحد الثاني والقسم الرمزي الأول بالقسم الرمزي الثاني هكذا:

س^{٢} × ٥ س ص = ١٥ س^{٣}ص

وكذلك ٤ ل^{٢} م × ٢ ل م × ٥م^{٣} × (- ٢ل) = - ٨٠ ل^{٤} م^{٥}

أما ٥س × ٧ ص = ٣٥ س ص

وأخيراً س × ص × ع = س ص ع وهكذا..

وعند ضرب حد جبري بمقدار جبري فإننا نستخدم خاصيته توزيع الضرب على الجمع في حقل الأعداد الحقيقية كما يلي:

أ × (ب + جـ) = (أ × ب) + (أ × جـ) التوزيع من اليمين

= أ ب + أ جـ

أو (ب + جـ) × أ = (ب × أ) + (جـ × أ) التوزيع من اليسار

= ب أ + جـ أ

وبما أن أ ب = ب أ الضرب تبديلي

وكذلك أ جـ = جـ أ الضرب تبديلي

فإن أ ب + أ جـ = ب أ + جـ أ

فإن أ (ب + جـ) = (ب + جـ) أ ويمكننا استخدام الصورة الأولى أكثر.

مثال:

٢س (٣ س – ٥ص) = (٢س × ٣س) – (٢س × ٥ ص)

= ٦ س^{٢} – ١٠ س ص

وكذلك ٧ (٢س + ٥ ص) = ٧ (٢س) + ٧ (٥ ص)

= ١٤س + ٣٥ ص

وهكذا وكان قانون التوزيع يقول س(س + ٧) = س (س) + س (٧)

= س^{٢} + ٧ س

والآن يمكن استخدام قانون التوزيع في ايجاد حاصل ضرب مقدارين جبريين بطريقة أفقية أو بطريقة عامودية كما في المثالين:

مثال:

أوجد حاصل ضرب (٢ س^{٢} + ٣س +٥) (٣ س - ٤) بطريقة أفقية.

الحل: بقانون التوزيع

(٣س - ٤) (٢س^{٢} +٣س +٥) = ٣س (٢س^{٢} + ٣س +٥) - ٤ (٢س^{٢} + ٣س +٥)

= ٦س^{٣} + ٩س^{٢} + ١٥س - ٨ س^{٢} - ١٢ س - ٢٠

= ٦س^{٣} + س^{٢} + ٣س - ١٠(لا تنس عند الضرب تجمع الأسس)

مثال:

أوجد حاصل ضرب (٢ س^{٢}+٣س +٥) (٣س - ٤) بطريقة عامودية.

الحل: كما في الشكل

٢س^{٢} + ٣س + ٥	المضروب
٣ س − ٤	المضروب فيه
٦س^{٣} + ٩ س^{٢} + ١٥ س	حاصل الضرب
٠ − ٨ س^{٢} - ١٢ س - ٢٠	جمعاً
٦س^{٣} + س^{٢} + ٣س - ٢٠	

والملاحظ الحصول على نفس الجواب بعمليتي التوزيع الأفقية وعملية الضرب العامودية. ونفضل طريقة التوزيع الأفقية كونها الأوسع انتشاراً والأسهل اجراءاً:

مثال تطبيق:

اذا كان ثمن الثلاجة يزيد عن ثمن الغسالة بـ ١٢٠ ديناراً وكلاهما من نوع جنرال الكترك، فما المقدار الجبري الذي يمثل ثمن ٨ ثلاجات وما ثمنها بالدنانير إذا كان ثمن الغسالة ١٨٠٠ ديناراً.

بما أن ثمن الثلاجة = ثمن الغسالة + الزيادة (نفرض ثمن الغسالة س دينار)

فإن ثمن الثلاجة = س + ١٢٠ دينار

وثمن ٨ ثلاجات = ٨ (س + ١٢٠)

وعندما س = ١٨٠٠ دينار

فإن ثمن ٨ ثلاجات= ٨ (١٨٠٠ + ١٢٠)

= ٨ (١٨٠٠) + ٨ (١٢٠)

= ١٤٤٠٠ + ٩٦٠ = ١٥٣٦٠ ديناراً.

هذا ويمكن استخدام قانون التوزيع في ايجاد مربع مجموع حدين كما يلي:

أوجد (أ + ب)^{٢} = (أ + ب) (أ + ب) = أ (أ + ب) + ب(أ + ب)

= أ^{٢} + أ ب + ب أ + ب^{٢}

= أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢}

وبشكل عام فإن:

مربع مجموع حدين = (الحد الأول + الحد الثاني)

مربع الحد الأول + ٢ × الحد الأول× الحد الثاني+ مربع الحد الثاني

ويمكن ايجاد مربع الفرق بين حدين كما يلي:

(أ − ب)^{2} = أ^{2} − ٢أ ب + ب^{2}

ويمكن جمعهما معاً: (أ ± ب)^{2} = أ^{2} ± ٢ أ ب + ب^{2}

والآن نعود الى كيفية ايجاد العامل المشترك الأكبر ع. م. أ للحدود الجبرية والمقادير الجبرية التي على شكل أقواس بعد أن كنا قد أوجدناه للأعداد في حقل الأعداد الحقيقية.

مثال:

أوجد ع . م. أ للعددين ١٨ ، ٢٤

١٨	٢٤	٢
٩	١٢	٣
٣	٤	

ع. م. أ = ٢ × ٣ = ٦

مثال:

أوجد ع. م. أ للحدين ١٠ س^{2} ص ، ٨ س ص^{2}

نحلل لكل من الحدود لوحده كما يلي:

١٠س^{2} ص = ٢ × ٥× س × س× ص

٨ س ص^{2} = ٢ × ٢× ٢× س × ص × ص

ونأخذ العوامل (أعداداً أو رموزاً) المشتركة هكذا:

ع. م. أ = ٢ × س × ص = ٢ س ص

وبشكل عام فالعامل المشترك الأكبر (ع. م. أ) لحدين أو أكثر هو:

حاصل ضرب العوامل المشتركة (كأعداد أو رموز) ذات الأس الأصغر في حالة الرموز:

مثال:

جد ع. م. أ للحدود الجبرية ٣ أ ب^{٥} ، ١٥ أ^{٢} ب^{٢} ، ٢٧ أ^{٢} ب^{٣}

ع. م. أ = (٣) (أ) (ب^{٢}) = ٣ أ ب^{٢}

ملحوظة:

اذا لم نجد عوامل مشتركة بين الحدود الجبرية فالعامل المشترك الأكبر هو ١ فقط.

مثال:

ع. م. أ للحدود س^{٢} ، ص^{٢} ، ٥ أ ب

هو ١ لعدم وجود عوامل مشتركة كأعداد أو كرموز.

أما ايجاد ع. م. أ للمقادير الجبرية التي على شكل أقواس فهي كما يلي:

مثال:

أوجد ع. م. أ للمقادير (كأقواس) الجبرية: ٥س (م + ن)^{٣} ، ١٠ ص (م + ن)^{٢}

ع. م. أ = (٥) (م + ن)^{٢} (القوس بأقل أُس)

ومن الملاحظ أن عملية توزيع الضرب على الجمع في حقل الأعداد الحقيقية والمتمثلة بقانون التوزيع على الأعداد والحدود والمقادير الجبرية تتم بفك الأقواس لتنتج مقداراً جبرياً واحد بعدد من الحدود هكذا:

أوجد (س – ص)(س + ٥ ص) = س (س + ٥ص) – ص(س + ٥ ص)

= س^{٢} + ٥ س ص – ص س - ٥ ص^{٢}

= س^{٢} + ٤ س ص - ٥ ص^{٢}

والآن سنعرض للعملية العكسية أي عملية تحويل المقادير الجبرية الى حاصل ضرب مقادير جبرية وكأنها حدود جبرية باستخدام الأقواس أي سنعيد المقدار الجبري س^{2} + ٤ س ص - ٥ ص^{2} الى صورته الأصلية كأقواس وهي (س- ص) (س + ٥ص).

ان عملية تحويل المقدار الجبري:

س^{2} + ٤ س ص - ٥ ص^{2} الى الصورة (س — ص) (س + ٥ ص)

تسمى عملية التحليل الى العوامل.

سنناقش عملية التحليل الى العوامل وطرق التحليل الى العوامل بالتفصيل خلال السطور التالية:

(٥ - ٣) التحليل الى العوامل Factorization وطرقه:

هي عملية اعادة كتابة المقدار الجبري مهما كان عدد حدوده الى صورة حاصل ضرب أقواس وكأنه حد واحد.

فكأن "التوزيع" عملية رياضية هدفها تركيب مقدار جبري من عدد صور "والتحليل الى العوامل" عملية رياضية عكسية هدفها تفكيك المقدار الجبري وتحويله الى حد واحد —ان جاز التعبير- وكحاصل ضرب أقواس.

وتتم عملية التحليل الى العوامل بطرق عدة نجملها بما يلي:

الطريقة الأولى:

التحليل الى العوامل باخراج العامل المشترك الأكبر.

مثال:

حلل الى العوامل ٦س^{3} + ١٥ س^{2} ص

بما أن ع. م. أ للحدين هو ٣ س^{2} فإن

٦س^{3} + ١٥ س^{2} ص = ٣س (٢ س + ٥ ص)

وكذلك حلل ٦ أ^{٢} ب - ١٤ أ ب^{٢} الى العوامل

بما أن ع. م. أ للحدود هو ٢ أ ب فإن:

٦ أ^{٢} ب - ١٤ أ ب^{٢} = ٢ أ ب (٣ أ - ٧ ب)

وكذلك حلل ٥ أ (س + ص) + ٧ ب (س + ص) - ٤ جـ (س + ص)

بما أن (س + ص) هو ع. م. أ للحدود فإن:

٥أ (س + ص) + ٧ ب (س + ص) - ٤ جـ (س + ص) = (س + ص) (٥ أ + ٧س - ٤ جـ)
وهكذا..

الطريقة الثانية:

"التحليل الى العوامل بتجميع الحدود ثم اخراج العامل المشترك الأكبر"

وهذه الطريقة ترتبط بالمقادير الجبرية المكونة من أربعة حدود فأكثر. إذ نقوم بتجميع الحدود التي تحوي عاملاً مشتركاً أو عوامل مشتركة فيما بينها، ونضعها داخل أقواس أولاً، من ثم نقوم باخراج العامل المشترك الأكبر وغالباً ما يكون على شكل قوس مشترك كما يلي:

مثال:

حلل ٣ س^{٢} ص + ٥ س^{٢} + ٣ ص^{٢} + ٥ ص الى عوامله.

الحل:

نقسم المقدار الجبري الى اثنين شرط أن يكون بين حدي كل قسم عامل مشترك أكبر هكذا:

٣س^{٢} ص + ٥ س^{٢} + ٣ ص^{٢} + ٥ ص

= (٣ س^{٢} ص + ٥ س^{٢}) + (٣ ص^{٢} + ٥ ص)

= س^{٢} (٣ص + ٥ س) + ص (٣ ص + ٥)

= (٣ ص + ٥) (س^{٢} + ص)

وكذلك حلل ٥ س^{٢} ص^{٣} + ١٠ س^{٢} – ٣ ص^{٤} – ٦ ص الى عوامله

بأسلوب ممثال لسابقه:

(٥ س^{٢} ص^{٣} + ١٠ س^{٢}) – (٣ ص^{٤} + ٦ ص) (غيرنا اشارة - ٦ ص الى + ٦ ص

= ٥ س^{٢} (ص^{٣} + ٢) – ٣ ص(ص^{٣} + ٢) كون المقسوس مسبوق باشارة -)

= (ص^{٣} + ٢) (٥س^{٢} – ٣ ص)

مثال تطبيقي:

اذا كان (س - ٢ ص) = ٨ فما القيمة العددية للمقدار

س (س - ٢ص) - ٢ص (ص – ٢ص) ؟

الفكرة أن نجعل المقدار لا يشمل من المتغيرات إلا (س – ٢ص) فقط بأي أس كان، كون (س - ٢ ص) = ٨ هي المعلومة فقط.

والآن المقدار: س (س - ٢ص) - ٢ ص (س – ٢ص)

= (س – ٢ص) (س – ٢ ص)

= (س – ٢ ص)^{٢}

= (٨)^{٢} = ٦٤

الطريقة الثالثة:

تحليل(*) الفرق بين مربعي حدّين "Difference of Two Squares":

من المعلوم أن مربع العدد = حاصل ضرب العدد لا نفسه(أي مساحة المربع هندسي)

فمربع س = س × س = س^{٢}

ومربع ص = ص × ص = ص^{٢}

(*) ومن الجدير بالذكر أن مجموع مربعين مثل س^{٢} + ص^{٢} يمكن تحليله ولكن في بند لاحق.

والفرق بين مربعين معناه باقي طرح المربع الثاني من المربع الأول هكذا:

$س^٢ - ص^٢$

وتحليله يكون بالشكل:

$س^٢ - ص^٢ = (س - ص) (س × ص)$

وللتحقق من صحة التحليل نبسط الطرف الأيسر بواسطة قانون التوزيع هكذا:

$(س - ص) (س + ص) = س (س + ص) - ص (س + ص)$

$= س^٢ + س ص - ص س - ص^٢$

$= س^٢ - ص^٢$ = الطرف الأيمن

وبشكل عام فإننا نضع المقدار الجبري المراد تحليله على صورة فرق بين مربعين كما يلي:

مثال:

حل $٤ س^٢ - ٩س^٢$ الى عوامل

$٤ س^٢ - ٩ ص^٢ = (٢ س)^٢ - (٣ ص)^٢$

$= (٢ س - ٣ ص) (٢ س + ٣ ص)$

وتبديل الأقواس أيضاً صواب هكذا:

$٤ س^٢ - ٩ ص^٢ = (٢س + ٣ ص)$ كون الضرب تبديلي.

ويمكن صياغة قاعدة تحليل المقدار بواسطة الفرق بين مربعين كما يلي:

الفرق بين مربعين حدين = (الحد الأول + الحد الثاني) (الحد الأول - الحد الثاني)

مثال:

$١٦س^٢ - (ص+ع)^٢ = (٤ س)^٢ - (ص+ع)^٢ \{٤ س - (ص + ع)\} \{٤ س + (ص + ع)\}$

$= (٤ س - ص - ع) (٤ س + ص + ع)$

وكذلك حلل $٨ أ^٢ - ١٨ ب^٢$ الى عوامله:

بما أن $٨ أ^٢$ ليس مربع كامل، كذلك $١٨ ب^٢$ فإننا لا نستطيع وضع المقدار على صورة الفرق بين مربعي حدين إلا باخراج العامل المشترك الأكبر هكذا:

$$٨ أ^٢ - ١٨ ب^٢ = ٢ (٤ أ^٢ - ٩ ب^٢)$$

$$= ٢ \{(٢ أ)^٢ - (٣ ب)^٢\}$$

$$= ٢ \{(٢ أ - ٣ ب) (٢ أ + ٣ ب)\}$$

مثال:

حلل $س^٢ - ١$ الى عوامله

$$س^٢ - ١ = (س)^٢ - (١)^٢$$

$$= (س - ١) (س + ١)$$ وهكذا..

مثال تطبيقي عددي:

ما قيمة $(٨,٥)^٢ - (١,٥)^٢$ باستخدام فكرة التحليل الى العوامل؟

بما أن كلاً من $(٨,٥)^٢$ ، $(١,٥)^٢$ مربع فإننا نستخدم الفرق بين مربعي حدين هكذا:

$$(٨,٥)^٢ - (١,٥)^٢ = (٨,٥ + ١,٥) (٨,٥ - ١,٥)$$

$$= (١٠) (٧) = ٧٠$$

" وللتحقق نقول: $(٨,٥)^٢ = ٨,٥ × ٨,٥ = ٧٢,٢٥$

وكذلك $(١,٥)^٢ = ١,٥ × ١,٥ = ٢,٢٥$

الفرق = ٧٠,٠٠ "

مثال:

أوجد قيمة $(٥٠٠)^٢ - (٤٩٩)^٢ = (٥٠٠ - ٤٩٩) (٥٠٠ + ٤٩٩)$

$$= (١) (٩٩٩) = ٩٩٩$$

مثال:

حلل ٥ (س + ص)^{٣} – ٥ (س – ص)

= ٥ (س + ص) { (س + ص)٢ - ١} باخراج ٥ (س + ص) عامل مشترك أكبر

= ٥ (س + ص) {(س + ص - ١) (س + ص +١ }

= ٥ (س + ص) (س + ص- ١) (س + ص + ١)

الطريقة الرابعة:

تحليل العبارة التربيعية (أو المقدار الثلاثي) الى عوامله الأولية Trinomisl Expression:

يُسمى المقدار الجبري أ س^{٢} + ب س + جـ ، أ ∋ ح* ، ب ، جـ ∋ ح

عبارة تربيعية عندها يُطلق على الأعداد الحقيقية أ ، ب ، جـ الأسماء التالية:

أ ⟵ مُعامل س^{٢} حيث س^{٢} الحد الأول

ب ⟵ مُعامل س حيث س الحد الأوسط

جـ ⟵ الحد المطلق أو الحد الخالي من س (الحد الأخير)

مثل ٢ س^{٢} + ٣ س + ١ ، س^{٢} – ٥ س ، ٣ س^{٢} + ٦ وهكذا....

والآن سأعرض كيفية تحليل العبارات التربيعية القابلة للتحليل (*)

سنقسم هذه العبارات مبدئياً الى قسمين أو شكلين:

الأول س^{٢} + ٨ س + ١٥
س^{٢} – ٨ س + ١٥
} الحد الأخير اشارته موجبة

فنقول:

اذا كانت اشارة الحد الأخير (المطلق أو الخالي من س) موجبة فإن الإشارتين داخل القوسين متشابهتان ومثل اشارة الحد الأوسط كما في المثالين:

(*) هناك عبارات تربيعية غير قابلة للتحليل سنتطرق اليها في سد لاحق.

مثال:

حلل $س^2 + 8 س + 15 = (س + 5)(س + 3)$

وللتحقق من الحل نحد الحد الأوسط قيمة واشارة هكذا:

+ 5 س

$س^2 + 8 س + 15 = (س + 5)(س + 3)$، + 5 س + 3 س = + 8 س الحد الأوسط قيمة واشارة

+ 3 س

مثال:

- 5 س

حلل $س^2 - 8 س + 15 = (س - 5)(س - 3)$

- 3 س

وللتحقق - 5 س - 3 س = - 8 س الحد الأوسط قيمة واشارة.

ونقول:

اذا كانت اشارة الحد الأخير سالبة فالاشارتان في القوسين مختلفتان هكذا (واشارة الأكبر مثل اشارة الأوسط):

+ 5 س

$س^2 + 2 س - 15 = (س + 5)(س - 3)$

- 3 س

للتحقق + 5 س - 3 س = + 2 س الحد الأوسط قيمة واشارة

وقيل حل أمثلة نلخص الاشارات كما يلي:

$س^2 + 5 س + 6 = (س + 2)(س + 3)$ الاشارتان

$س^2 - 5 س + 6 = (س - 3)(س - 2)$ متشابهتان

$س^2 + 1 س - 6 = (س + 3)(س - 2)$ الاشارتان

$س^2 - 1 س - 6 = (س + 2)(س - 3)$ مختلفتان

مثال:

حلّ $س^2$ + ٢س - ٣٥ الى عواملها

$س^2$ + ٢س - ٣٥ (س - ٥) (س + ٧) الاشارتان مختلفتان

والحد الأوسط = + ٧ س - ٥س = + ٢ س قيمة واشارة

وحلل $س^2$ + ٩ س + ١٨ الى عواملها

$س^2$ + ٩ س + ١٨ = (س + ٣) (س + ٦) الاشارتان متشابهتان مثل الوسط

والحد الأوسط = + ٦ س + ٣ س = + ٩ س قيمة واشارة

ثم حلل $س^2$ – ١١ س – ٢٦ الى عواملها

$س^2$ – ١١ س – ٢٦ = (س - ١٣) (س + ٢) الاشارتان مختلفتان

والحد الأوسط = - ١٣ س + ٢س = - ١١ س قيمة واشارة

وبشكل عام تنسحب طريقة تحليل العبارة التربيعية عندما يكون:

معامل $س^2$ أكبر من ١ صحيح أي أ > ١

مثال:

حلل ٣ $س^2$ + ١٤ س + ٨ الى عواملها

٣ $س^2$ + ١٤ س + ٨ = (٣ س + ٢) (س +٤) الاشارتان متشابهتان مثل الوسط

والحد الأوسط = + ١٢ س + ٢ س = + ١٤ س قيمة واشارة

وحلل ١٤ $س^2$ – ٢٩ س – ١٥ الى عواملها

١٤ $س^2$ – ٢٩ س – ١٥ = (٧ س + ٣) (٢ س - ٥) الاشارتان مختلفتان

والحد الأوسط = - ٣٥س + ٦ س = - ٢٩ س قيمة واشارة

ثم حلل $س^٢ + ٥$ س الى عواملها

$س^٢ + ٥$ س = س(س + ٥) باخراج العامل المشترك الأكبر

وحلل ٧ $س^٢ - ٢٨$ س الى عواملها

٧ $س^٢ - ٢٨$س = ٧ س (س - ٤) باخراج العامل المشترك الأكبر.

وهناك صورة خاصة للعبارة التربيعية غير أولية، تسمى العبارة التربيعية التي تمثل المربع الكامل مثل:

حلل $س^٢ + ٦$ س + ٩ الى عواملها

$س^٢ + ٦$ س + ٩ (س + ٣) (س + ٣)

وبما أن القوسين متطابقين:

فإن س٢ + ٦ س + ٩ = (س + ٣) (س + ٣) = $(س + ٣)^٢$

وكذلك:

حلل $س^٢ - \frac{٢}{٣}$ س + $\frac{١}{٩}$ الى عواملها

$س^٢ - \frac{٢}{٣}$س + $\frac{١}{٩}$ = (س - $\frac{١}{٣}$) (س - $\frac{١}{٣}$)

= $(س - \frac{١}{٣})^٢$

مثال تطبيقي عددي:

باستخدام التحليل الى العوامل أوجد قيمة:

$(٩,٩)^٢$ + ٢ (٩,٩) (٠,١) + ٠,٠١

$(٩,٩)^٢$ + ٢(٩,٩) (٠,١) + $(٠,١)^٢$ = (٩,٩ + ٠,١) (٩,٩ + ٠,١)

= $(٩,٩ + ٠,١)^٢$ = $(١٠)^٢$ = ١٠٠

مثال:

ملعب كرة قدم مستطيل الشكل مساحته (٣ س^{٢} − ١١س + ٦) وحدة مربعة أوجد أبعاده بدلالة المتغير س.

نحلل العبارة التربيعية ٣ س^{٢} − ١١س + ٦ = (٣ س − ٢) (س − ٣)

فالبعد الأول ٣ س − ٢ وحدة طول

والبعد الثاني س − ٣ وحدة طول.

الطريقة الخامسة:

❖ **تحليل مجموع مكعبي حدين والفرق بينها ايضاً** Sum and Difference of Two Cubes:

عند ايجاد حاصل الضرب (س + ص) (س^{٢} − س ص + ص^{٢}) باستخدام قانون التوزيع ينتج المقدار التالي وهكذا:

(س + ص) (س^{٢} − س ص + ص^{٢}) = س (س^{٢} − س ص + ص^{٢}) + ص(س^{٢} − س ص + ص^{٢})

= س^{٣} − س^{٢} ص + س ص^{٢} + ص س^{٢} − س ص^{٢} + ص^{٣}

= س^{٣} + ص^{٣}

والعكس صواب كونه عملية التحليل.

أي أن س^{٣} + ص^{٣} = (س + ص) (س^{٢} − س ص + ص^{٢})

وبالكلام مجموع مكعبي حدين = (الحد الأول + الحد الثاني) (مربع الحد الأول − الحد الأول + الحد الثاني + مربع الحد الثاني)

مثال:

حلل ٨ س^{٣} + ٢٧ ص^{٣} ، الى عوامله

أولاً: نضع المقدار بصورة مجموع مكعبي حدين كما يلي:

٨ س^{٣} + ٢٧ ص^{٣} = (٢ س)^{٣} + (٣ ص)^{٣}

= (٢ س + ٣ ص) (٤ س^{٢} – ٦ س ص + ٩ ص^{٢})

ملحوظة:

لوضع المقدار الجبري بصورة مجموع مكعبي حدين فإننا نحلل المعاملات ونأخذ من كل ثلاثة عوامل متشابهة عامل واحد ونجد حاصل ضربها معاً.

مثال:

حلل ٥١٢ + س^{٣} الى عوامله

أولاً: نضع المقدار بصورة مجموع مكعبي حدين كما يلي:

٥١٢ + س^{٣} = (٨)^{٣} + (س)^{٣}

= (٨ + س) (٦٤ – ٨س + س^{٢})

العدد	العامل	
٥١٢	٢	
٢٥٦	٢	٢
١٢٨	٢	
		×
٦٤	٢	
٣٢	٢	٢
١٦	٢	
		×
٨	٢	
٤	٢	٢
٢	٢	
١		

أما تحليل الفرق بين مكعبي حدين فيتم كما يلي:

س^{٣} - ص^{٣} = (س – ص) (س^{٢} + س ص + ص^{٢})، قارن هذا التحليل مع مجموع مكعبي حدين لترى الفرق بالاشارات فقط.

س^{٣} + ص^{٣} = (س + ص) (س^{٢} – س ص + ص^{٢})

مثال:

حلل س^{٣} + ١ = (س)^{٣} + (١)^{٣}

= (س +١) (س^{٢} – س × ١ +١)

= (س +١) (س^{٢} – س +١)

وكذلك $س^3 + 216 ص^3$

$= (س)^3 + (6 ص)^3$

$= (س + 6ص)(س^2 - 6 س ص + 36 ص^2)$

٢١٦	٣
٧٢	٣
٢٤	٣
٨	٢
٤	٢
٢	٢
١	

3×2

هذا ويمكن دمج قانوني تحليل مجموع مكعبي حدين والفرق بين مكعبي حدين بالصورة التالية على شكل قانون واحد هكذا:

هنا التغير بالاشارات فقط

$س^3 \pm ص^3 = (س \pm ص)(س^2 \mp س ص + ص^2)$

ملحوظة:

بعض المقدار الجبرية تحلل بأكثر من طريقة من طرق التحليل التالية:

(١) اخراج العامل المشترك.

(٢) تجميع الحدود.

(٣) الفرق بين مربعي حدين.

(٤) العبارة التربيعية.

(٥) مجموع مكعبي حدين والفرق بينهما.

كما يلي:

مثال:

حلل $س^6 - 1$ الى عوامله:

هناك حلان هما:

الحل الأول: $س^6 - 1 = (س^2)^3 - (1)^3$ كفرق بين مكعبي حدين

$= (س^2 - 1)(س^4 + س^2 + 1)$

$= (س - 1)(س + 1)(س^4 + س^2 + 1)$ وكفرق بين مربعي حدين لأحد القوسين.

الحل الثاني: $س^{٦} - ١ = (س^{٣})^{٢} - (١)^{٢}$ كفرق بين مربعي حدين

$= (س^{٣} - ١)(س^{٣} + ١)$

$= (س - ١)(س^{٢} + س + ١)(س + ١)(س^{٢} - س + ١)$ وكفرق بين مكعبي حدين لكلا القوسين معاً.

مثال:

حلل $١٦ س^{٣} + ٥٤$ الى عوامله.

$١٦ س^{٣} + ٥٤ = ٢ (٨ س^{٣} + ٢٧)$ بإخراج العامل المشترك الأكبر

$= ٢ ((٢س)^{٣} + (٣)^{٣})$

$= ٢ (٢س + ٣)(٤ س^{٢} - ٦س + ٩)$ مجموع مكعبي حدين.

مثال:

حلل $س^{٤} - ١٦$ الى عوامله

$س^{٤} - ١٦ = (س^{٢})^{٢} - (٤)^{٢}$

$= (س^{٢} - ٤)(س^{٢} + ٤)$

$= (س - ٢)(س + ٢)(س^{٢} + ٤)$

(٥ - ٤) تطبيقات على التحليل الى العوامل:

وللتحليل الى العوامل تطبيقات عديدة منها وليس على سبيل الحصر؛ اختزال الكسور الجبرية وجمعها وطرحها ولنبدأ أولاً:

بالقسمة الطويلة كما يلي:

وعملية قسمة المقادير الجبرية عملية عكسية لعملية ضربها كما وردت باستخدام قانون التوزيع، هكذا:

(س - ٥) (س^{٢} + ٤س + ٧) = س (س^{٢} + ٤س + ٧) - ٥ (س^{٢} + ٤س + ٧)

= س^{٣} + ٤ س^{٢} + ٧ س — ٥ س^{٢} — ١٠س - ٣٥

= س^{٣} — س^{٢} — ١٣س — ٣٥

والآن عند قسمة س^{٣} — س^{٢} - ١٣س = ٣٥ على س - ٥ فلا أن يكون خارج القسمة هو المقدار س^{٢} + ٤س + ٧ ولكن كيفية عملية القسمة هو ما نحن بصدده في هذا السياق.

اقسم (س^{٣} — س^{٢} — ١٣س - ٣٥) على (س - ٥)

يسمى المقدار س^{٣}—س^{٢} — ١٣س - ٣٥ المقسوم

والمقدار س - ٥ المقسوم عليه

س^{٢} + ٤س + ٧
س - ٥ | س^{٣} — س^{٢} —١٣س —٣٥
طرفاً ± س^{٣} ∓ ٥س^{٢}
٤س^{٢} — ١٣س - ٣٥
طرفاً ± ٤س^{٢} ∓ ٢٠ س
٧س — ٣٥
∓ ٧س ± ٣٥
∴

وحسب الخطوات:

نقسم س^{٣} على س = س^{٢} ثم نضرب س^{٢} بالمقسوم عليه

نقسم ٤ س^{٢} على س = ٤س ثم نضرب ٤ س^{٢} بالمقسوم عليه

نقسم ٧ س على س = ٧ ثم نضرب ٧ المقسوم عليه

ويسمى المقدار س^{٢} + ٤س + ٧ الجواب أو خارج القسمة

والباقي صفر

للتحقق من صحة الحل:

المقسوم = المقسوم عليه × الجواب + الباقي

س^{٣} — س^{٢} — ١٣س - ٣٥ = (س - ٥) (س^{٢} + ٤س + ٧) + صفر وهذا ما يسمى بجواز ترتيب القسمة

مثال:

آجرِ عملية القسمة التالية:

(س^{٢} + ٣س + ٥) ÷ (س + ١) وتحقق من صحة الحل:

(س^{٢} + ٣س + ٥) ÷ (س +١) = س + ٢

والباقي ٣

	س^{٢} + ٢
س + ١	س^{٢} + ٣س + ٥
	∓ س^{٢} ∓ س
	٢س + ٥
	∓ ٢س ∓ ٢
	٣

والتحقق:

س^{٢} + ٣س + ٥ = (س + ١) (س + ٢) + ٣

= س (س + ٢) + ١ (س + ٢) + ٣

= س^{٢} + ٢س + س + ٢ + ٣

= س^{٢} + ٣س + ٥ كما ورد بالسؤال.

ثم نجد المضاعف المشترك الأصغر ونقارنه مع العامل المشترك الأكبر.

وبالرموز (م . م. أ) ونقارنه مع (ع. م . أ)

أوجد م . م. أ للمقادير س^{٢} + س ، س^{٢} - ١ ثم أوجد ع. م. أ لها.

نحلل كل مقدار كما يلي:

س^{٢} + س = س(س+ ١)

س^{٢} - ١ = (س + ١) (س- ١)

م . م. أ = حاصل ضرب العوامل المشتركة في العوامل غير المشتركة هكذا:

= س (س + ١) (س - ١)

لكن ع. م. أ = حاصل ضرب العوامل المشتركة فقط

= (س + ١)

مثال:

أوجد ع. م. أ ثم م. م. أ للمقادير الجبرية التالية:

٣س^{٢} + ٩ س ، ٢ س^{٢} – ١٨س ، س^{٣} + ٦س^{٢} + ٩ س

نحلل المقادير جميعها الى عواملها هكذا وترتيبها:

$٣ س^٢ + ٩ س = ٣ س (س + ٣) = ٣س (س + ٣)$

$٢ س^٣ - ١٨س = ٢س (س^٢ - ٩) = ٢س (س - ٣) (س + ٣)$

$س^٣ + ٦ س٢ + ٩س = (س^٢ + ٦س + ٩) = س (س + ٣) (س + ٣)$

ع. م. أ = س (س +٣)

م. م. أ = ٦ س (س + ٣) (س - ٣) (س + ٣)

$= ٦ س (س + ٣)^٢ (س - ٣)$

تبسيط الكسور الجبرية:

لما كان الكسر الجبري عبارة عن كسر عادي بسطه مقدار جبري ومقامه مقدار جبري آخر مثل $\frac{س^٢ + س - ٦}{٤ - ٤}$ فإن تبسيط الكسر الجبري معناه أن نحلل بسطه ومقامه ثم نختزل الكسر أي نقسم بسطه ومقامه على ع. م. أ لهما مثل:

بسط الكسر الجبري $\frac{س^٢ - ص^٢}{س - ص} = \frac{(س - ص) (س + ص)}{س - ص} = س + ص$

وكذلك $\frac{س^٤ - ١}{س^٣ - ١} = \frac{(س^٢ - ١) (س^٢ + ١)}{(س - ١) (س^٢ + س + ١)} = \frac{(س - ١) (س + ١) (س^٢ + ١)}{(س - ١) (س^٢ + س + ١)}$

$= \frac{(س + ١) (س^٢ + ١)}{س^٢ + س + ١}$

جمع الكسور الجبرية وطرحها واختصارها أيضاً:

بعد تحليل المقامات نجري عملية الجمع أو الطرح أو كليهما هكذا:

مثال:

أوجد $\frac{٣}{س - ٣} - \frac{٢س}{س^٢ - ٩} = \frac{٣}{س - ٣} - \frac{٢س}{(س - ٣) (س + ٣)}$

$= \frac{٣ (س × ٣)}{(س - ٣) (س + ٣)} - \frac{٢س}{(س - ٣) (س + ٣)}$ توحيد المقامات

$= \frac{٣ س + ٩}{(س - ٣) (س + ٣)} - \frac{٢س}{(س - ٣) (س + ٣)} = \frac{٣ س + ٩ - ٢س}{(س - ٣) (س + ٣)}$

$$= \frac{س + ٩}{(س - ٣)(س + ٣)}$$

مثال:

أوجد $\frac{س}{٤س^٢ - ٤} + \frac{٢}{٢س - ٢} = \frac{س}{٤(س^٢ - ١)} + \frac{٢}{٢(س - ١)}$

$$= \frac{س}{٤(س - ١)(س + ١)} + \frac{٢ \times ٢ (س + ١)}{٢ \times ٢(س - ١)(س + ١)}$$ توحيد المقامات

$$= \frac{س}{٤(س - ١)(س + ١)} + \frac{٤(س + ١)}{٤(س - ١)(س + ١)}$$

$$= \frac{س + ٤س + ٤}{٤(س - ١)(س + ١)} = \frac{٥س + ٤}{٤(س - ١)(س + ١)}$$

مثال تطبيقي:

عددان زوجيان هما ٢س ، ٢س + ٢ جد ناتج جمع مقلوبيهما:

$\frac{١}{٢س}$ مقلوب الأول ، $\frac{١}{٢س + ٢}$ مقلوب الثاني

ناتج جمع مقلوبيهما = $\frac{١}{٢س} + \frac{١}{٢س + ٢}$

$$= \frac{١(٢س + ٢)}{٢س(٢س + ٢)} + \frac{١(٢س)}{(٢س + ٢)(٢س)}$$

$$= \frac{٢س + ٢}{٢س(٢س + ٢)} + \frac{٢س}{٢س(٢س + ٢)} = \frac{٢س + ٢ + ٢س}{٢س(٢س + ٢)}$$

$$= \frac{٤س + ٢}{٢س(٢س + ٢)} = \frac{\cancel{٢}(٢س + ١)}{\cancel{٢}س(٢س + ٢)} = \frac{٢س + ١}{س(٢س + ٢)}$$

(٥- ٥) أمثلة محلولة على التحليل الى العوامل وتطبيقاته

مثال (١):

جد القيمة العددية للمقادير الجبرية اذا كان س = ٣

ص = - ٢

ع = ٥

(i) ٥س – ٣ ص + ٤ ع = ٥ (٣) - ٣ (- ٢) + ٤ (٥)

= ١٥ + ٦ + ٢٠ = ٤١

(ii) ٥ س^{٢} ص^{٢} ع = (٥) (٣)^{٢} (- ٢)^{٢} (٥) = (٤٥) (٢٠)

= ٩٠٠

(iii) س ص + ص ع – س ع = (٣) (- ٢) + (- ٢) (٥) – (٣) (٥)

= - ٦ - ١٠ - ١٥ = - ٣١

مثال (٢):

حديقة منزل على شكل مستطيل طولها س متر وعرضها ص متر:

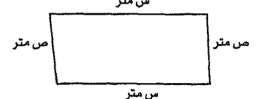
(i) اكتب المقدار الجبري الذي يميل محيطها = مساحتها ايضاً

(ii) فإذا كان س = ٢ ص = ٢٠ متر احسب محيطهاا ومساحتها أيضاً.

المحيط = الطولين + العرضين

= ٢ (س) + ٢ (ص)

= ٢س + ٢ ص متراً



المساحة = الطول × العرض

= (س) (ص) = س ص متراً مربعاً

وعندما س = ٢ ص = ٢٠ متر فإن س = ٢٠ م ، ص = ١٠ م

المحيط = ٢ (٢٠) + ٢ (١٠) = ٤٠ + ٢٠ = ٦٠ متراً

والمساحة = (٢٠) (١٠) = ٢٠٠ متراً مربعاً

مثال (٣):

اكتب المقدار الجبري ٥ أ^{٢} + ٣ أ^{٢} - ٨ أ + ٧ أ - ٩ بأبسط صورة

نجمع الحدود المتشابهة معاً هكذا:

(٥ أ^{٢} + ٣ أ^{٢}) + (- ٨ أ - ٧ أ) - ٩

= ٨ أ^{٢} — أ - ٩

مثال (٤):

ضع عدداً أو رمزاً مناسباً في المربع لتصبح العبارات التالية صواباً.

٥ (٦ + ٨) = (٥ × ٦) + (□ × ٨) ← الجواب — العدد ٥

(٦ س + ٢ ص) × ٣ ع = (٦س × □) + (٢ ص × □) ← الجواب — ٣ ع

٥ × س + ٥ × ص = ٥ (□ + □) ← س + ص — س ، ص

مثال (٥):

أوجد حاصل ضرب:

(i) (س - ٥) (س + ٥) = س (س + ٥) - ٥ (س + ٥)

= س^{٢} + ٥ س - ٥ س - ٢٥

= س^{٢} - ٢٥

(ii) (٤ س — ٥ص) (٥ س — ٤ ص)

= ٤ س (٥ س — ٤ص) — ٥ ص (٥ س - ٤ ص)

= ٢٠ س^{٢} - ١٦ س ص - ٢٥ س ص + ٢٠ ص^{٢}

= ٢٠ س^{٢} - ٤١ س ص + ٢٠ ص^{٢}

(iii) (٣ س + ٥)^{٢} = (٣ س + ٥) (٣ س + ٥)

= ٣ س (٣ س + ٥) + ٥ (٣ س + ٥)

= ٩ س^{٢} + ١٥ س + ١٥ س + ٢٥

= ٩س^{٢} + ٣٠ س + ٢٥

مثال (٦):

قطعة أرض مربعة الشكل طول ضلعها س^{٢} + س + ١ متر احسب مساحتها بدلالة س ، وعندما س = ١٠ احسب مساحتها بالأمتار المربعة.

س^{٢} + س + ١

مساحة المربع = (الضلع)^{٢}

= (س^{٢} + س + ١)^{٢} = (س^{٢} + س + ١) (س^{٢} + س + ١)

= س^{٢} (س^{٢} + س + ١) + س (س^{٢} + س +١) + ١ (س^{٢} + س + ١)

= س^{٤} + س^{٣} + س^{٢} + س^{٣} + س^{٢} + س + س^{٢} + س + ١

= س^{٤} + ٢ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٢س + ١ متراً مربعاً

وعندما س = ١٠ فإن مساحتها

= (١٠)^{٤} + ٢ (١٠)^{٣} + ٣ (١٠)^{٢} + ٢ (١٠) + ١

= ١٠٠٠٠ + ٢٠٠٠ + ٣٠٠ + ٢٠ + ١

= ١٢٣٢١ م^{٢}

أو مباشرة ((١٠)^{٢} + (١٠) + ١) ((١٠)^{٢} + ١٠ + ١)

= (١١١) (١١١) = ١٢٣٢١ م^{٢}

مثال (٧):

أوجد ع.م.أ و م.م.أ للمقادير الجبرية ٦م (أ – ب)^{٢}، ٥ م^{٢} (أ – ب)، ١٠م^{٣} (أ – ب)^{٣}

بما أن ع.م.أ = حاصل ضرب العوامل المشتركة فقط

وان م.م.أ = حاصل ضرب العوامل المشتركة في غير المشتركة.

ولكون ٦م (أ – ب)^{٢} = ٢ × ٣ × م (أ – ب) (أ – ب)

١٥م^{٢} (أ – ب) = ٥ × ٣ × م × م (أ – ب)

١٠م^{٣} (أ – ب)^{٣} = ٢ × ٥ × م × م × م (أ – ب) (أ – ب) (أ – ب)

فإن ع.م.أ = م (أ – ب)

وان م.م.أ = ٣٠ م^{٣} (أ – ب)^{٣}

مثال (٨):

حلل الى العوامل:

(i) ٦ س^{٢} ص + ٩ س ص^{٢} - ١٢ س^{٧} ص^{٦}

الحل: ٣ س ص (٢ س + ٣ ص - ٤ س^{٦} ص^{٥})

(ii) ٢ أ س + ٥ أ ص - ٨ ب س – ٢٠ ب ص

الحل:= (٢ أ س + ٥ أ ص) – (٨ ب س + ٢٠ ب ص) (لاحظ كيف تغيرت الاشارة في القوس الثاني لأنه سُبق باشارة سالب).

= أ (٢س + ٥ ص) – ٤ ب (٢ س + ٥ ص)

= (٢ س + ٥ ص) (أ – ٤ ب)

(iii) س^{٤} - ١

الحل: س^{٤} - ١ = (س^{٢})^{٢} — (١)^{٢}

= (س^{٢} + ١) (س^{٢} - ١)

= (س^{٢} + ١) (س + ١) (س- ١)

(iv) س^{٣} — س ص^{٢}

الحل: س(س^{٢} — ص^{٢})

= س (س + ص) (س — ص)

(v) س^{٢} — ١٠ س + ٢٥

الحل: (س - ٥) (س - ٥)

= (س - ٥)^{٢}

(vi) ب^{٢} - ١٢ ب - ٨٥

= (ب - ١٧) (ب + ٥)

(vii) ك^{٢} - ٤٠ + ٣ ك

= ك^{٢} + ٣ ك - ٤٠

= (ك + ٨) (ك - ٥)

(iix) ٣ س^{٢} - ٤ س - ١٥

= (٣ س + ٥) (س - ٣)

مثال (٩):

ما قيمة باستخدام الفرق بين مربعين $(٩٨٫٥)^٢ - (١٫٥)^٢$

$= (٩٨٫٥ + ١٫٥)\ (٩٨٫٥ - ١٫٥)$

$= (١٠٠)\ (٩٧٫٠)$

$= (١٠٠)\ (٩٧) = ٩٧٠٠$

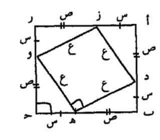
مثال (١٠):

حلل $س^٤ - ص^٤$ الى عوامله

$س^٤ - ص^٤ = (س^٢ + ص^٢)\ (س^٢ - ص^٢)$

$= (س^٢ + ص^٢)\ (س + ص)\ (س - ص)$

مثال (١١):



الشكل المجاور عبارة عن مربعين متداخلين هما أ ب جـ د ، د هـ و ز ومن الأطوال على الشكل نفسه بيّن أن $ع^٢ = س^٢ + ص^٢$

مساحة المربع الأكبر = مساحة المربع الأصغر + مساحة المثلثات الأربعة المتكافئة

$(س + ص)^٢ \quad = \quad ع^٢ \quad + \quad ٤ \times \frac{١}{٢} \times ص \times س$

$(س + ص)^٢ = ع^٢ + ٢\ س\ ص$

$س^٢ + ٢\ \cancel{س\ ص} + ص^٢ = ع^٢ + ٢\ \cancel{س\ ص}$

$\therefore س^٢ + ص^٢ = ع^٢$ وهذا بيان آخر لنظرية فيثاغورس

مثال (١٢):

حلل الى العوامل:

س^{٣} — ١٢٥ = (س)^{٣} — (٥)^{٣} بصورة فرق بين مكعبين

= (س - ٥) (س^{٢} + ٥ س + ٢٥)

وكذلك س^{٣} + ١٢٥ = (س)^{٣} + (٥)^{٣} بصورة مجموع مكعبين

= (س + ٥) (س^{٢} - ٥ س + ٢٥)

مثال (١٣):

حلل $\frac{١}{س^{٣}}$ + $\frac{١}{ص^{٣}}$ الى عوامله:

= $(\frac{١}{س})^{٣}$ + $(\frac{١}{ص})^{٣}$ = ($\frac{١}{س}$ + $\frac{١}{ص}$) ($\frac{١}{س^{٢}}$ - $\frac{١}{س ص}$ + $\frac{١}{ص^{٢}}$)

مثال (١٤):

حلل س^{٦} — ص^{٦}

الحل بطريقتين:

الأولى كفرق بين مربعين:

(س^{٣})^{٢} — (ص^{٣})^{٢} = (س^{٣} + ص^{٣}) (س^{٣} — ص^{٣})

= (س + ص) (س^{٢} — س ص + ص^{٢}) (س — ص) (س^{٢} + س ص + ص^{٢})

والثانية كفرق بين مكعبين:

(س^{٢})^{٣} — (ص^{٢})^{٣} = (س^{٢} — ص^{٢}) (س^{٤} + س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤})

= (س — ص) (س + ص) (س^{٤} + س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤})

مثال (١٥):

أجرِ عملية القسمة $(\text{س}^{٤} + ٥\,\text{س}^{٣} + ٤\,\text{س}^{٢} - ٣) \div (\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ١)$

$$\text{س}^{٢} + ٧\text{س} + ١٩$$

$$\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ١ \;\Big)\; \text{س}^{٤} + ٥\text{س}^{٣} + ٤\text{س}^{٢} - ٣$$

$$\mp \text{س}^{٤} \pm ٢\text{س}^{٣} \pm \text{س}^{٢}$$

$$٧\text{س}^{٣} + ٥\,\text{س}^{٢} - ٣$$

$$\mp ٧\text{س}^{٣} \pm ١٤\,\text{س}^{٢} \pm ٧\,\text{س}$$

$$١٩\,\text{س}^{٢} + ٧\,\text{س} - ٣$$

$$\mp ١٩\,\text{س}^{٢} \pm ٣٨\,\text{س} \pm ١٩$$

$$٤٥\,\text{س} + ١٦$$

خارج القسمة $= \text{س}^{٢} + ٧\,\text{س} + ١٩$

الباقي $= ٤٥\,\text{س} + ١٦$

مثال (١٦):

اختصر الكسر الى أبسط صورة:

$$\frac{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢}{\text{س}^{٣} - ١}$$

الحل: $\dfrac{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢}{\text{س}^{٣} - ١} = \dfrac{(\text{س} + ٢)\,(\text{س} \not- ١)}{(\text{س} \not- ١)\,(\text{س}^{٢} + \text{س} + ١)} = \dfrac{\text{س} + ٢}{\text{س}^{٢} + \text{س} + ١}$

مثال (١٧):

أوجد ناتج:

$$\frac{٢٢}{\text{س}^{٢} - ٤} + \frac{١١}{٢\text{س} + ٤}$$

$$= \frac{٢٢}{(\text{س} - ٢)\,(\text{س} + ٢)} + \frac{١١}{٢(\text{س} + ٢)} = \frac{٢\,(٢٢) + ١١\,(\text{س} - ٢)}{٢(\text{س} + ٢)\,(\text{س} - ٢)}$$

$$= \frac{٤٤ + ١١ س - ٢٢}{٢(س + ٢)(س - ٢)} = \frac{٢٢ + ١١ س}{٢(س + ٢)(س - ٢)} = \frac{١١ (٢ + س)}{٢(س + ٢)(س - ٢)}$$

$$= \frac{١١}{٢س - ٢}$$

مثال (١٨):

عددان زوجيان هما ٢س ، ٢ س + ٢ جد ناتج جمع مقلوبيهما:

$$\frac{١}{٢ س} + \frac{١}{٢س + ٢} = \frac{١}{٢ س} + \frac{١}{٢ (س + ١)} = \frac{١ (س + ١) + ١ (س)}{٢ س (س + ١)}$$

$$= \frac{س + ١ + س}{٢س (س + ١)} = \frac{٢س + ١}{٢س (س + ١)}$$

مثال (١٩):

حلل المقدار الى عوامله:

(i) $س^٣ + س^٢ - س - ١$

الحل: $(س^٣ + س^٢) - (س + ١)$

$= س^٢ (س + ١) - ١ (س + ١)$

$= (س + ١)(س^٢ - ١)$

$= (س + ١)(س - ١)(س + ١)$

$= (س + ١)^٢ (س - ١)$

(ii) حلل العبارة $٨٨ + ١٤ س^٢ - ٢ س^٤$ الى عواملها "لاحظ أن العدد في البداية مبين بالتحليل في البداية هكذا:

$= ٢ (٤٤ + ٧ س^٢ - س^٤)$

$$= ٢\,(١١ - س^{٢})\,(٤ + س^{٢})$$

$$= ٢\,(\sqrt{١١} - س)\,(\sqrt{١١} + س)\,(٤ + س^{٢})$$

مثال (٢٠):

اختصر الكسر التالي $\dfrac{٢س + ١}{٢س\,(س + ١)}$

الحل:

$$\frac{س^{٤} - ١٤س^{٢} - ٥١}{س^{٤} - ٢س^{٢} - ١٥} = \frac{(س^{٢} - ١٧)\,(س^{٢} + ٣)}{(س^{٢} - ٥)\,(س^{٢} + ٣)}$$

$$= \frac{س^{٢} - ١٧}{س^{٢} - ٥} = \frac{(س - \sqrt{١٧})\,(س + \sqrt{١٧})}{(س - \sqrt{٥})\,(س + \sqrt{٥})}$$

(٥- ٦) أسئلة وتدريبات وقوانين تتطلب حلولاً من الدارسات والدارسين

(١) حلل الى العوامل الأولية:

(١) $٥\,\text{س}^{٢} - ٢٠$

(٢) $\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} + ٣$

(٣) $٢\text{س}^{٢} - \text{س} - ٣$

(٤) $٦\,\text{س}^{٢} + ٥\,\text{س} - ٦$

(٥) $٨\,\text{س}^{٢} - ١٤\text{س} - ٩$

(٦) $١٢\,\text{س}^{٢} - ١٩\text{س} - ١٨$

(٧) $٦\,\text{س}^{٢} + ٥\,\text{س}\,\text{ص} - ٦\,\text{ص}^{٢}$

(٢) اطرح $\frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ١٢}$ من $\frac{\text{س} + ٤}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ١٢}$

(٣) اختصر $\frac{٣}{\text{س} - ٤} - \frac{٢}{\text{س} - ٥} - \frac{\text{س} - ٧}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}$

(٤) اختصر $\frac{\text{س}^{٤} - \text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} + ٢}{٢\,\text{س}^{٣} - \text{س} - ١}$

(٥) اختصر $\frac{١}{٢\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٢} + \frac{١}{٢\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٢} + \frac{١}{١ - \text{س}^{٢}}$

(٦) حلل الى العوامل الأولية:

(١) $١٠\,\text{س}^{٢} + ٧٩\,\text{س} - ٨$

(٢) $٧٢٩\,\text{س}^{٦} - \text{ص}^{٦}$

(٣) $٣\,\text{س}^{٣} + ٦\,\text{س}^{٢} - ١٨٩\,\text{س}$

(٤) $\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س}\,\text{ص} + \text{ص}^{٢} + \text{س} + \text{ص}$

(٥) $\text{س}^{٣} - ٨\,\text{ص}١٥$

(٦) $س^٤ - س^٢ + س - ١$

(٧) $س^٣ + ص^٣ + ٣ س ص (س + ص)$

(٨) $س^٣ - ص^٣ - س (س^٢ - ص^٢) + ص (س - ص)^٢$

(٧) جمّع الحدود الجبرية التالية:

(١) $٧ س - س + س^٢ + ٣ س$ {$س^٢ + ٩ س$}

(٢) $٣ أ - أ - ٢ ب - ٣ ب$ {$٢ أ - ٥ ب$}

(٨) إذا كانت س = - ١ ، ص = - ٢ ، ع = - ٣

فما القيمة العددية لِـ: س ص + ص ع + ع س

(٩) حلل الى العوامل الأولية:

(١) $٢٧ س^٢ - ٤٨ ص^٢$

(٢) $س^٢ - ٨ س + ١٢$

(٣) $س^٢ - ١٧ س - ١٨$

(١٠) ما قيمة كل من الآتي باستخدام التحليل الى العوامل:

(١) $(٣٢٩)^٢ - (١٧١)^٢$ { ٧٩٠٠٠ }

(٢) $(١٠١)^٢ - (٩٩)^٢$ { ٤٠٠ }

(١١) أوجد ع. م. أ ، م. م. أ للمقادير الجبرية التالية:

$٣ أ^٢ + ٩ أ ب$

$٢ أ^٢ - ١٨ أ ب^٢$

$أ^٣ + ٦ أ^٢ ب + ٩ أ ب^٢$

{$أ (أ + ٣ ب)$ ، $٦ أ (أ + ٣ ب)^٢ (أ - ٣ ب)$ }

(١٢) اختصر ما يلي لأبسط صورة ممكنة:

$$\frac{س^{٤} + ٥\ س\ ص - ٤\ ص^{٢}}{س^{٢} - ١٦\ ص^{٢}} = \frac{٢\ س\ ص}{٢س^{٢} + ٨\ س\ ص} \qquad \{ \qquad \}$$

(١٣) ما القيمة العددية للمقدار:

$(أ + ب)^{٢} + (ب + جـ)^{٢} + (جـ + أ)^{٢}$

عندما: أ = - ١

ب = ٢

جـ = - ٣

(١٤) حلل الى العوامل الأولية:

(١) $٣\ س^{٢} - ٦\ س\ ص$

(٢) $س^{٢} - أ\ س + ب\ س - أ\ ب$

(٣) $س^{٢} + ١١\ س + ٢٤$

(٤) $س^{٢} - ١٨\ س + ٨١$

(٥) $س^{٢} - ٣\ س - ٥٤$

(٦) $١ - ٤٩\ س^{٦}$

(٧) $س^{٦} - ص^{٦}$

(١٥) أوجد حاصل ضرب (٣ س − ٤ ص) (٢ س + جـ)

$\{ ٦\ س^{٢} - ٥\ س\ ص - ٤\ ص^{٢} \}$

{ ارشاد: استعن بقانون التوزيع إذا أردت }.

(١٦) اختصر لأبسط صورة:

$$\frac{أ\ س^{٢} - ٤\ أ + ٢\ س^{٢} - ٨}{٢\ أ^{٢} - ٤\ س + أ^{٢}\ س - ٨} \qquad \left\{ \frac{س - ٢}{أ - ٢} \right\}$$

وكذلك اختصر:

$$\frac{أ\ س - أ\ ص}{ك\ س - ك\ ص + جـ\ س - جـ\ ص} = \left\{ \frac{أ}{ك + جـ} \right\}$$

(١٧) اختصر $\frac{س^٢ - ١}{س^٤ - ١}$ ، س $\neq$ ١

$$\left\{ \frac{س^٢ + س + ١}{(س + ١)\ (س^٢ + ١)} \right\}$$

(١٨) إذا كانت س = ٥ ، ص = - ١٥ ، ع = ٢٥ فما القيمة العددية لكل من:

(١) س + ص^٢ + ع^٢

(٢) $\frac{١}{س} - \frac{٢}{ص} - \frac{٣}{ع}$

(١٩) بيّن أن (س^٢ + ٢ س + ١) (س^٢ - ٢ س + ١) = س^٤ + ١

{ارشاد: استعن بقانون التوزيع}

(٢٠) اختصر $\frac{س^٤ - ١٠\ س^٢ - ٩}{س^٢ - ٢س - ٣}$

(٢١) أوجد ع.م.أ ، م.م.أ للمقادير الجبرية:

س^٣ - س^٢ + ٢ س - ٢ ، س - س^٢ - ٤ س + ٤

(٢٢) أوجد ع.م.أ للعبارات:

س^٣ - ١ ، س^٤ - ١ { (س - ١) }

(٢٣) حلل ق (س) = س^٣ - س^٢ - ٤ س + ٤ الى عوامله الأولية.

{ (س - ٢) (س - ١) (س + ٢) }

(٢٤) حلل الى العوامل: (١ + س)^٦ - (١ - ٦)^٦

{١٢ س + ٤٠ س^٣ + ١٢ س^٥}

(٢٥) ما مساحة مستطيل طوله (٥س + ١) سم وعرضه (٥ س - ١) سم وما طول محيطه أيضاً؟

{(٢٥ $س^٢$ - ١) $سم^٢$ ، ٢٠ س سم}

(٢٦) بركة ماء مربعة الشكل طول ضلعها ٤٩ متراً، محاطة برصيف منتصف عرضه ١ متر من جميع الجهات. احسب مساحة الرصيف مستخدماً طرق التحليل إلى العوامل.

{٢٠٠ $م^٢$}

{ ارشاد: مساحة الرصيف = مساحة البركة والرصيف ومساحة البركة}

(٢٧) أيّ من العبارات التالية أولية؟

(١) $س^٢$ + ٢س + ١

(٢) $س^٢$ + ٩

(٣) $س^٢$ - ٤ س

{ العبارة الثانية }

(٢٨) اختصر الكسر $\frac{س^٤ - ٢ س^٢ - ١٥}{س^٤ - ١٤س^٢ - ٥١}$

{$\frac{س^٢ - ٥}{س^٢ - ١٧}$}

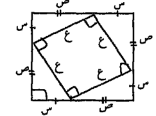
(٢٩) ما قيمة {(٢١)^٢ - ١} {(١٧)^٢ - ١}؟

{١٢٦٧٢٠}

{ارشاد: استخدم التحليل الى العوامل }

(٣٠) اعتماداً على الشكل المرفق والذي يمثل مربعان متداخلان بيّن أن:

$س^٢$ + $ص^٢$ = $ع^٢$



{ارشاد: مساحة المربع الأكبر – مساحة المربع الأصغر= مساحة المثلثات الأربعة القائمة الزاوية}

(٣١) اختصر الكسور الجبرية التالية الى أبسط صورة:

(١) $\frac{أ^٢ - ب^٢}{أ^٣ - ب^٣}$ (٢) $\frac{أ^٣ + ب^٣}{أ ب + ب^٢}$ (٣) $\frac{٢ - أ}{(أ - ٢)^٢}$

(٣٢) إذا كانت س = - ٥ فما القيمة العددية لكلٍ من:

$\frac{٥ - س}{س}$ ، $\frac{٥ + س}{س}$ ، $\frac{٥}{س - ٥}$ ، $\frac{٥ + ١}{س - ١}$ ، $\frac{س - ٢}{٥ - ٢}$

(٣٣) اذا كانت أ = صفر ، ب = - ١ ، جـ = $\frac{١}{٢}$

فما القيمة العددية للمقدار (٥أ - ٣ب) (أ - ب) - ب {٣أ - جـ (٤أ - ب) - ب^٢ (أ + جـ)}

(٣٤) أوجد ع. م. أ للمقدارين:

٧ س^٣ - ١٠ س^٢ - ٧س + ١٠ ، ٢س^٣ - س^٢ - ٢س + ١

(٣٥) حلل الى العوامل ٩ س^٦ ص^٢ - ٥٧٦ ص^٢ - ٤ س^٨ + ٢٥٦ س^٢

{(٣ص - ٢س) (٣ص + ٢س) (س - ٢) (س^٢ + ٢س + ٤) (س + ٢) (س^٢ - ٢س + ٤)}

{ارشاد : ابدأ بتجميع الحدود}

(٣٦) أوجد ع. م. أ ، م. م. أ للمقادير الجبرية:

٢٠س^٤ + س^٢ - ١ ، ٢٥ س^٤ + ٥ س^٣ - س - ١ ، ٢٥ س^٤ - ١٠س^٢ + ١

(٣٧) إذا كان (س + $\frac{١}{س}$)^٢ = ٣ بيّن أن س^٣ + $\frac{١}{س^٣}$ = صفر

وإذا كان س - $\frac{١}{س}$ = ١ فبيّن أن س^٢ + $\frac{١}{س^٢}$ = ١

وكذلك س^٢ - $\frac{١}{س^٢}$ = ٤

وإذا كانت س = ٢ + $\sqrt{٢}$ فأوجد قيمة س^٢ + $\frac{٤}{س^٢}$

(٣٨) حلل الى العوامل الأولية س^٢ + ٥ س ص - ٢٤ ص^٢ + س - ٣ ص

{ارشاد : تجميع الحدود}

(٣٩) أوجد ع. م. أ للمقدارين:

$أ^٢ ب + ب^٢ جـ - أ ب جـ - أ ب^٢$

$أ س^٢ + أ ب - أ^٢ - ب س^٢$

(٤٠) اختصر لأبسط صورة $\frac{س + ٤}{س^٢ - س - ١٢} - \frac{س + ٣}{س^٢ + س - ١٢}$

(٤١) حل الى العوامل $أ^٢ + ٢ أ ب + ب^٢ + أ + ب$ {(أ + ب) (أ + ب + ١)}

{ ارشاد: تجميع الحدود }

(٤٢) اختصر لأبسط صورة $\frac{٥ س^٢ - ١٤ س^٢ + ١٦}{٣ س^٣ - ٢ س^٢ + ١٦ س - ٤٨}$

(٤٣) أوجد ع. م. أ للمقادير $س٢ - ٧س + ١٢$، $٣ س^٢ - ٦س - ٩$، $٢ س^٢ - ٦ س - ٨$

(٤٤) جمع الحدود المتشابهة في المقادير التالية:

(١) $٥ س^٢ - ٢س^٢ + ٣ س - س^٢$ (٢) $٧ س - ص - ٢ ص$

(٣) $٣ أ - أ - ٢ ب - ٣ ب$

(٤٥) إذا كان أ = ٢ ، ب = - ٣ ، جـ = - ١ ، د = ٣

فما القيمة العددية لكل من:

(١) أ + ب + جـ + د (٢) أ + ب - جـ - د

(٣) أ - ب - جـ - د (٤) أ - ب + جـ - د

(٥) - أ - ب + جـ - د

{ ارشاد: استعن بوعاء الاشارات }

(٤٦) حل المقادير الجبرية التالية إلى عواملها $س^٢ - ١$ ، $س^٣ - ١$ ، $س^٤ - ١$

(٤٧) حلل الى العوامل:

(١) $(س - ٥)^٢ - ٣ (س - ٥) + ٢$

(٢) $٩ س - ٩س^٣$

(٤٨) بسّط المقدار $(أ + ب + جـ)^٣ - (ب + جـ - أ)^٣ - (جـ + أ - ب)^٣ - (أ + ب - جـ)^٣$

{٢٤ أ ب جـ}

(٤٩) حلل الى العوامل الأولية:

(١) $١٦ س^٤ - ٨١ ص^٤$ (٢) $س^٤ - ٥ س^٢ + ٤$

(٣) $(س ص - ١) - (س - ص)^٢$ (٤) $(٤س^٢ - ٣س - ١٨)^٢ - (٤س^٢ + ٣س)^٢$

(٥٠) ما قيمة كلٍ من $(\sqrt{٣} - ١)^٢$ ، $(\sqrt{٥} - ١)^٢$ ، $(\sqrt{٧} - ١)^٢$

(٥١) حديقة مربعة الشكل مساحتها $(س^٢ + ١٦س + ٦٤)م^٢$ ، $س \leq$ صفر جد طول محيطها بدلالة س. {٤ س + ٣٢ متر}

{ ارشاد: أوجد طول ضلعها أولاً }

(٥٢) حلل الى العوامل الأولية:

(١) $\frac{س^٢}{٤} - \frac{ص^٢}{٩}$ (٢) $س^٢ + \frac{٢}{٣}س + \frac{١}{٩}$

(٣) $\frac{١}{٢}س^٢ - \frac{١}{١٢٨}$ (٤) $\frac{١}{س^٣} + \frac{١}{ص^٣}$

(٥) $\frac{س^٣}{١٢٥} - \frac{٨}{ص^٣}$

(٥٣) ما مكعب كلٍ من الحدود التالية ٢ س ، - ٣ ص ، ٥ ع

وبالجذر التكعيبي لكلٍ من الحدود $١٢٥س^٣$ ، $٢٧ ع^٣$ ، $٢١٦ ص^٣$

(٥٤) حلل الى العوامل الأولية $س^٦ - ١$ ، $س^٦ + ١$

(٥٥) اذا كان س = ٧ ، ص = ٥ فما القيمة العددية لحاصل الضرب:

(س^{٢} + ص^{٢} - ٢س ص) (س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س ص) { ٥٧٦ }

(٥٦) بسّط الكسور الجبرية التالية:

$\frac{أ^{٢} - ب^{٢}}{أ - ب}$ ، $\frac{أ - ب}{أ^{٢} - ب^{٢}}$ ، $\frac{أ^{٢} - ب^{٢}}{أ ب - ب^{٢}}$ ، $\frac{أ^{٢} + ب^{٢}}{أ ب + ب^{٢}}$

(٥٧) اذا كان عمر سلمى الآن س سنة وعمر سلوى يزيد عن عمر سلمى ٤ سنوات. ما مجموع عمريهما الآن، وما مجموع عمريهما بعد ٥ سنوات؟

(٥٨) اكتب ما يلي بلا أقواس ٧ (٨ + ١٧) ، ٦ (٢ + س) ، - ٥ (٣ س — ٥ص)

(٥٩) فك الأقواس التالية باستخدام قانون التوزيع أو بأي طريقة تريد:

(٥ س + ٧) (٧ س + ٥) ، (٥ س - ٧) (٧ س - ٥)

(٥ س + ٧) (٥ س + ٧) ، (٥ س - ٧) (٥ س - ٧)

(٦٠) اذا كان س - ٢ ص = ٧ فما القيمة العددية للمقدار

س (س - ٢ص) - ٢ص (س - ٢ ص) { ٤٩ }

(٦١) حلل الى العوامل الأولية:

(١) أ ب^{٢} + ب جـ + ب^{٢} + أ ب جـ

(٢) ٢ س ع + ١٠ س ل + ٥ ص ل + ص ع

(٦٢) عيّن المتغير (القسم الرمزي) ومعامله (القسم العددي) في كل من الحدود:

٧ س ، - ٥ع ، - ٩ م ن^{٢} ، ٦ س ص ، س^{٢}ص^{٢}ع

(٦٣) في مسرح مدينة جرش وفي احدى الحفلات هنالك كان ثمن تذكرة دخول الدرجة الأولى عشرة دنانير وثمن تذكرة دخول الدرجة الثانية خمسة دنانير،

عبّر عن المبلغ الذي يمكن جمعه في هذه الحفلة بدلالة عدد الحضور (س) على شكل مقدار جبري، وكم ديناراً يكون المبلغ اذا بلغ عدد الحضور في الدرجة الأولى ١٥٠ شخصاً وفي الدرجة الثانية ٢٥٠ شخص؟

(٦٤) حديقة منزلية على شكل مستطيل طولها س متراً وعرضها ص متراً، يُراد احاطتها بسياج تكلفة المتر الطولي له تساوي ٥ دنانير، ما تكلفة السياج جميعه اذا كان طولها يساوي ٥٠ متراً وعرضها يساوي ٣٠ متراً؟

(٦٥) جد ناتج جمع (٥ ص + ٣ س − ٥ ل) + (٦ س + ٣ ص)

وباقي طرح (٧ س + ٨ ص - ٩ ع) − (٣ ع + ٥ ص)

وحاصل ضرب ٢ س (س^{٢} + ٥) ، (- ٣) (س + ٤) ، (س + ٤) (- ٣)

(٢ س + ٥) (٢س - ٥) ، س (س^{٢} + ٥ س - ٧)

(٦٦) بيّن بمثال عددي واحد فقط أن:

(س + ص)^{٢} $\neq$ س^{٢} + ص^{٢}

(س − ص)^{٢} $\neq$ س^{٢} − ص^{٢}

(س + ص) (س − ص) = س^{٢} − ص^{٢} لكل س ، ص أعداد حقيقة.

(٦٧) فك الأقواس التالية ولاحظ الأجوبة وجد الفروق إن وجدت:

(س + ٥)^{٢} ، (٥ + س)^{٢}

(س - ٥)^{٢} ، (٥ − س)^{٢}

(٦٨) ضع ما تراه مناسباً في المربع أدناه لتصبح العبارات صائبة:

(١) أ × (☐ + جـ) = (أ × ب) + (أ × جـ)

(٢) (ع + ل) × س = (ع × ☐) + (☐ × س)

(٦٩) لوحة من الورق المقوى على شكل مثلث طول قاعدتها (س + ص)سم وارتفاعها (س − ص) سم احسب مساحتها. علماً بأن س > ص > ٠

(٧٠) جد ع. م. أ للحدود الجبرية التالية:

(١) ٣ س ص^{٢} ، ١٥ س^{٢} ص ، ٢٧ س^{٢} ص^{٢}

(٢) ٥ (أ − ب) ، ٩ (أ − ب)

(٣) ٨ س (س - ٢ ل)^{٣} ، ٢٤ ص (س - ٢ ل)^{٢}

(٧١) حلل الى العوامل:

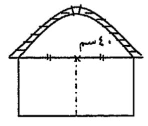
(١) ١٠ س^{٣}ص + ٢٠ س^{٢} ص − ٥س ص^{٢}

(٢) ١٢ ل^{٢}س - ٢٨ م^{٢} س + ١٥ ل^{٢} ص - ٥ م^{٢} ص

(٣) ١٠ ل^{٢} - ٤ ل

(٤) ١٢ س^{٣} ص^{٢} - ١٨ س^{٢} ص^{٣}

(٧٢) نافذة كما في الشكل مكونة من نصف دائرة قطرها ٤٠ سم مستطيل.



يُراد عمل إطار من الألمنيوم للجزء العلوي فقط (النصف دائرة) لوضع زجاج داخله، فإذا كانت تكلفة المتر الطولي من الألمنيوم ١٢ دينار وتكلفة المتر المربع من الزجاج ٩ دنانير، فما تكلفة الألمنيوم والزجاج معاً؟

(٧٣) إذا كانت س = ٦ ، ص = ٤، ع = ٣ ، ما القيمة العددية للمقدار:

$\sqrt[٣]{٢ س + ٣ ص + ع}$

{ ٣ }

(٧٤) بسّط ما يلي:

$$\frac{س^2 + س\,ص}{س^2 + ص^2} \times \frac{س^4 - ص^4}{س\,ص + ص^2} \times \frac{ص}{س}$$

(٧٥) بسّط ما يلي:

$$\frac{س^2 - ٧\,س\,ص + ١٢\,ص^2}{س^2 + ٥\,س\,ص + ٦\,ص^2} \div \frac{س^2 - ٥\,س\,ص + ٤\,ص^2}{س^2 + س\,ص - ٢\,ص^2}$$

(٧٦) حلل الى العوامل الأولية:

(١) $س^3 + ٥\,س^2 + س + ٥$ { $(س^2 + ١)(س + ٥)$ }

(٢) $س^2 - ٢\,س\,ص - ٣٢٣\,ص^2$ { $(س - ١٩)(س + ١٧\,ص)$ }

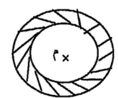
(٧٧) اذا كان أ + ب = ١ حيث أ ، ب أعداد حقيقة بيّن أن $(أ^2 - ب^2)^2 = أ^3 + ب^3 - أ\,ب$

(٧٨) اختصر لأبسط صورة $\frac{(س + ١)^3 - (س - ١)^3}{(س + ١)^4 - (س - ١)^4}$

(٧٩) إذا كانت أ = - ١ ، ب = - ٢ ، جـ = - ٣ ما القيمة العددية لكل من:

أ - ب - جـ ، $أ^2 - ب^2$ ، $جـ^3 - أ^3$ ، $أ^3 - ٢\,أ^2 - أ - ١$

(٨٠) دائرتان متحدتان بالمركز كما في الشكل



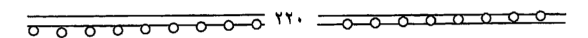
نصف قطر الصغرى = ١٣,٧٣ سم

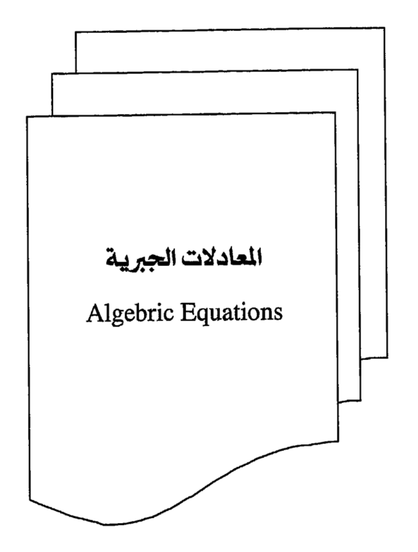
ونصف قطر الكبرى = ١٥,٧٣ سم

احسب المساحة المحصورة بينهما (المظللة في الشكل)

{ ارشاد : استخدم التحليل }

(٨١) حلل المقدار $١٢\,س^2 - ١٩\,س - ١٨$ الى عوامله الأولية.





المعادلات الجبرية

Algebric Equations

(٦ - ١) الجملة المفتوحة Open Sentence

الكلام في اللغة قسمان هما:

"انشاء وخبر"

أما الانشاء فتمثله العبارات والجمل التي ترد على أسلوب:

الأمر: مثل؛ اذهب الى المدرسة مبكراً.

والتعجب: مثل؛ ما أجمل فصل الربيع!

ثم الاستفهام: مثل؛ كيف حالك الآن؟

ومن الملاحظ أن جميع هذه الأساليب لا تتضمن معنىً للخطأ أو الصواب، كونها تعبر عن جمل لا تُنبئ عن أمور حدثت في الماضي أو لم تحدث على السواء، لأن الخطأ لا يشوبها ولا الصواب أي لا تتحمل معنى الخطأ أو الصواب.

وأما الخبر: فتمثله عبارات وجمل ترد على أسلوبٍ يُفهم منه مدى صحة أو خطأ الحدث الذي نُفصح عنه.

لنبدأ الآن بالجملة المفتوحة، فنقول: لاحظ هذه الجمل وقرِّر أيها خطأ وأيها صواب.

عمان عاصمة الأردن ⟵ صواب

٧ + ٥ أصغر من ٩ ⟵ خطأ

س عدد طبيعي أولي ⟵ لا نستطيع الحكم على صواب أو خطأ هذه الجملة، كون المتغير س أعطاها معنى مبهم غير واضح. وإذا ما استبدلنا هذا المتغير بواحد من الأعداد الأولية:

أ = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ١٧ ، ... } تصبح الجملة:

س عدد طبيعي أولي ⟵ صواب

أما إذا استبدلنا المتغير بواحد من الأعداد :

ب = {٤ ، ٦ ، ٨، ١٠ ، ١٢ ، ...} تصبح الجملة:

س عدد طبيعي أولي ←—— خطأ

لذلك تسمى الجملة "س عدد طبيعي أولي" جملة مفتوحة.

وتسمى المجموعة الطبيعية ط* = {١ ، ٢ ، ٣، ...} مجموعة التعويض Substitution set

أما المجموعة أ = {٢ ، ٣، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ١٧ ، ...} تسمى مجموعة الحل Solution Set

وكما تلاحظ أن مجموعة الحل ⊇ مجموعة التعويض.

فالجملة المفتوحة: جملة تحتوي متغير أو أكثر لا تستطيع الحكم على مدى صحتها (صواب أو خطأ) إلا إذا استُبدِلَ المتغير بعدد أو عنصر من مجموعة تسمى مجموعة التعويض.

"ومن الآن فإن مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الحقيقية ح إلا اذا ذُكر خلاف ذلك"

ومن أشهر الجمل المفتوحة وأوسعها انتشاراً المعادلات:

(٦- ٢) **المعادلة Equation**:

المعادلة جملة مفتوحة تشتمل على رمز المساواة = ، أو هي طرفان متساويان لأي جملة مفتوحة:

مثل س + ٥ = ٩ (س متغير ، عدد حقيقي)

س + ص = ٨ (س ، ص متغيران ، أعداد حقيقية)

س + ص + ع = ١٢ (س ، ص، ع متغيرات أعداد حقيقية)

والمعادلات بشكل عام تعتبر ركيزة من ركائز الرياضيات كونها تسند كثيراً من الموضوعات الرياضية الأخرى حيث تساهم في حلول الكثير من مسائلها وتمارينها المنوعة، عندما تؤول في نهايتها الى معادلات تحتاج الى طرق حلٍ مبسطة وبلا تعقيد.

لذا فإنني سأناقش في مؤلفي هذا جميع أصناف المعادلات الجبرية، وسأوضح كيفية حلولها بطرق سهلة وبلا غموض. والجدير بالذكر أن المعادلات تتواءم مع بعضها البعض في أنظمة خاصة بها حسب المبدأ القائل "عدد المعادلات في النظام الواحد منها يساوي تماماً عدد المتغيرات في كل معادلة في النظام".

وبإيجاز شديد: عدد المعادلات = عدد المتغيرات في النظام الواحد والعكس صواب.

وحل المعادلة معناه ايجاد قيم المتغيرات التي يحتويها النظام.

ولحل أنظمة المعادلات في حقل الأعداد الحقيقة (ح ، + ، ·) وجب أن نستعرض الحقائق التالية:

(i) لكل عدد حقيقي مثل أ يوجد نظير جمعي يسمى المعكوس هو − أ .

فمعكوس أ = − أ ومعكوس −أ = − (− أ) = أ ، لكل أ ∋ ح

لأن أ + (− أ) = (− أ) + أ = صفر (حيث الصفر العنصر المحايد لعملية الجمع)

وبشكل عام معكوس أ هو − أ وبالعكس.

(ii) لكل عدد حقيقي مثل أ يوجد نظير ضربي يسمى المقلوب هو $\frac{١}{أ}$ ومقلوب $\frac{١}{أ}$ هو أ

لأن أ × $\frac{١}{أ}$ = $\frac{١}{أ}$ × أ = ١ (حيث "١" هو العنصر المحايد لعملية الضرب)

وبشكل عام مقلوب $\frac{أ}{ب}$ هو $\frac{ب}{أ}$ وبالعكس.

(iii) مجموعة التعويض في حقل الأعداد الحقيقية (ح، + ، ·) هي مجموعة الأعداد الحقيقية ح إلا إذا ذُكر خلاف ذلك.

(iv) حل أنظمة المعادلات معناه إيجاد مجموعة الحل في كل نظام باستخدام خواص الحذف في الجمع والضرب كما يلي:

لكل أ ، ب ، جـ ∈ ح فإن:

أولاً: اذا كان أ + جـ = ب + جـ

وبإضافة − جـ = − جـ معكوس العدد جـ

أ = ب

ثانياً: اذا كان أ . جـ = ب . جـ

وبضرب الطرفين بمقلوب العدد جـ وهو $\frac{1}{جـ}$ ، جـ ≠ صفر

$\frac{1}{جـ}$ (أ . جـ) = $\frac{1}{جـ}$ (ب . جـ)

أ = ب وهكذا..

سأعرض في هذا السياق جميع أنظمة المعادلات الجبرية، وسأناقش كيفية حل كلٍ منها كما يلي:

دونك المعادلات التالية والتي كل منها يشكل نظاماً:

س + ٥ = ٩

س - ٨ = ٧

٣ س = ١٥

س ÷ ٧ = ٦

٢ س − ٤ = ١١

س + جـ = صفر وغيرها من المعادلات

والحل مباشرة:

"نجعل المتغير في جهة والأعداد في جهة أخرى كما يلي":

س + ٥ = ٩

- ٥ - ٥ بإضافة معكوس العدد ٥ للطرفين

∴ س = ٤

مجموعة الحل = { ٤ }

وكذلك س – ٨ = ٧

+ ٨ + ٨ بإضافة معكوس العدد - ٨ للطرفين

∴ س = ١٥

مجموعة الحل = { ١٥ }

وكذلك $\frac{٣س}{٣} = \frac{١٥}{٣}$ بضرب طرفي المعادلة بمقلوب العدد٣

∴ س = $\frac{١٥}{٣}$ = ٥

مجموعة الحل = { ٥ }

وكذلك س ÷ ٧ = ٦

أي $\frac{س}{٧} = \frac{٦}{١}$ وبالضرب التبادلي

س = ٤٢

مجموعة الحل = { ٤٢ }

وكذلك ٢ س - ٤ = ١١

+ ٤ + ٤

$\frac{٣س}{٣} = \frac{١٥}{٢}$

س = $\frac{١٥}{٢}$

مجموعة الحل = { $\frac{١٥}{٢}$ }

س − جـ = صفر

+ جـ + جـ

س = جـ

مجموعة الحل = { جـ}

وبشكل عام يمكن تلخيص خطوات الحل بإضافة النظير الجمعي أو المعكوس الى طرفي ا لمعادلة في حالتي الجمع والطرح وضرب طرفي المعادلة بالنظير الضربي في حالتي الضرب والقسمة.

ويمكن أن يتطلب حل النظام من المعادلات الخطية بمتغير واحد حطوات أخرى مثل: تجميع المتغيرات مع وضعها في طرف واحد.

مثال:

حل المعادلة ٣ س - ٢ = ٢ س + ٥

- ٢س - ٢ س

س - ٢ = ٥

+ ٢ + ٢

س = ٧

مجموعة الحل = { ٧}

والكسور يجب التخلص منها إن وجدت كما في المثال:

مثال:

حل المعادلة $\frac{١}{٣}$ س + ٥ = - ٧ بضرب طرفي المعادلة بالمضاعف المشترك الأكبر للمقامات.

٣) $\frac{س}{٣}$ + ٥ = - ٧

س + ١٥ = - ٢١

- ١٥ - ١٥

س = - ٣٦

مجموعة الحل = { - ٣٦}

والأقواس يجب فكها وإزالتها ثم حل المعادلة كما في المثال:

مثال:

حل المعادلة ٤ (٥ - ٢ س) = ٢ س + ٧ فك القوس بها للتوزيع

٢٠ - ٨ س = ٢ س + ٧

٢ س ٢ س

٢٠ - ١٠ س = ٧

- ٢٠ - ٢٠

$\frac{- ١٠ س}{- ١٠}$ = $\frac{- ١٣}{- ١٠}$

س = $\frac{١٣}{١٠}$

مجموعة الحل = { $\frac{١٣}{١٠}$ }

مثال تطبيقي:

ما العدد الحقيقي الذي إذا طُرح منه ٥ وضرب الناتج في ٣ أصبح الناتج ١١٧؟

"يجب أن نكوّن معادلة ثم نحلها"

نفرض أن العدد الحقيقي هو س

$٣ (س - ٥) = ١١٧$ بفك القوس

$٣ س - ١٥ = ١١٧$

$\frac{٣ س}{٣} = \frac{١٣٢}{٣}$

∴ س = ٤٤ العدد المطلوب

للتحقق من صحة الحل: ٤٤ - ٥ = ٣٩ ، ٣٩ × ٣ = ١١٧ فالحل صواب.

مثال آخر:

نافذة على شكل مستطيل يزيد طولها عن ضعفي عرضها بمقدار ٦٠ سم، فإذا كان محيطها ٦ متر أوجد أبعادها.

نفرض عرضها س متر

فطولها = ٢ (س) + ٦٠ = ٢ س + ٦٠

محيطها = الطولين + العرضين

= ٢ (٢ س + ٦٠) + ٢ س = ٦ × ١٠٠ (طولها ٦ م الى ٦٠٠ سم)

٤ س + ١٢٠ + ٢ س = ٦٠٠

٦ س + ١٢٠ = ٦٠٠

- ١٢٠ - ١٢٠

العرض = س

الطول ٢ س + ٦٠

٦ س = ٤٨٠ ⟵ س = $\frac{٤٨٠}{٦}$ = ٨٠ سم العرض

الطول = ٢ (٨٠) + ٦٠ = ١٦٠ + ٦٠ = ٢٢٠ سم الطول

(٦- ٤) حل نظام من معادلة تربيعية واحدة بمتغير واحد:

وهذا النظام يشمل معادلة واحدة على الصورة:

أ س^{٢} + ب س + جـ = صفر

حيث أ . ب . جـ أعداد حقيقة أ $\neq$ صفر

وتسمى هذه الأعداد المعاملات وتصنف كما يلي:

أ ← معامل س^{٢} وهو الحد الأول

ب ← معامل س وهو الحد الأوسط

جـ ← الحد الخالي من س أو المطلق وهو الحد الأخير

وحل المعادلة التربيعية معناه ايجاد قيم المتغير فيها والتي تسمى جذورها.

ويمكن حل المعادلة التربيعية بطرق عدة منها:

(i) حل المعادلة التربيعية أ س^{٢} + ب س + جـ = صفر ،أ $\neq$ صفر بالتحليل الى العوامل.

وتكون المعادلة التربيعية على الأشكال التالية:

الأول: أ س^{٢} + ب س + جـ = صفر ثلاثية الحدود (تُحلل كأنها عبارة تربيعية)

الثاني: أ س^{٢} + ب س = صفر ثُنائية الحدود (تُحلل باخراج العامل المشترك)

الثالث: أ س^{٢} + جـ = صفر ثُنائية الحدود (تُحلل كفرق بين مربعين)

وطريقة التحليل الى العوامل هي الطريقة الخاصة لحل المعادلة التربيعية، وتستخدم عندما يكون مميز المعادلة ب^{٢} − ٤ أ جـ $\leq$ صفر ومربع كامل. إذ نقوم على تحليل الطرف الأيمن للمعادلة − بعد جعل طرفها الأيسر مساوياً للصفر − بطرق التحليل المعروفة إلى قوسين حاصل ضربهما مساوياً للصفر. ومنها ينتج أن قيمة كل قوس يساوي الصفر هكذا:

مثال:

أوجد مجموعة الحل للمعادلة التربيعية س^{2} + ١٢ س – ٨٥ = صفر بواسطة التحليل الى العوامل اذا كان ذلك ممكناً.

بما أن س^{2} + ١٢ س - ٨٥ = صفر

وان أ س^{2} + ب س + جـ = صفر

فإن: أ = ١ ، ب = ١٢ ، جـ = - ٨٥

ب^{2} - ٤ أ جـ = (١٢)^{2} – (٤ × ١ × - ٨٥) = ١٤٤ + ٣٤٠ = ٤٨٤ = (٢٢)^{2} مربع كامل.

∴ تحل المعادلة بواسطة التحليل الى العوامل هكذا:

(س + ١٧) (س - ٥) = صفر (كون اشارة الحد المطلق سالبة فالإشارتان مختلفتان)

(س + ١٧) = صفر ، س - ٥ = صفر

س = - ١٧ ، ٥

مجموعة الحل = { - ١٧ ، ٥}

أي أن - ١٧ ، ٥ هي جذرا المعادلة التي يحققانها.

للتحقق من صحة الحل= (- ١٧)^{2} + ١٢(- ١٧) - ٨٥ = ٢٨٩ - ٢٠٤ - ٨٥ = صفر

وكذلك (٥)^{2} + ١٢ (٥) - ٨٥ = ٢٥ + ٦٠ - ٨٥ = صفر

مثال:

حل المعادلة التربيعية ٢ س^{2} + ٥ س = صفر

دون ايجاد المميز ب^{2} – ٤ أ جـ كونها غير تامة، تحلل باخراج العامل المشترك الأكبر كما يلي:

$٢ س^٢ + ٥ س = س (٢ س + ٥) =$ صفر

س = صفر الجذر الأول

$٢س + ٥ =$ صفر ، $س = - \frac{٥}{٢}$ الجذر الثاني

مجموعة الحل للمعادلة $= \{- \frac{٥}{٢}$ ، صفر$\}$

مثال:

حل المعادلة $(س - ٥)^٢ = ٧$ دون تبسيطها أو فك الأقواس.

ودون ايجاد المميز $ب^٢ - ٤$ أ جـ نحلل كما يلي:

$(س - ٥)^٢ = ٧ \longrightarrow (س - ٥)^٢ - ٧ =$ صفر كفرق بين مربعين

$\{(س - ٥) - \sqrt{٧}\} \{(س - ٥) + \sqrt{٧}\} =$ صفر

ومنها $س - ٥ - \sqrt{٧} =$ صفر $\longrightarrow س = ٥ + \sqrt{٧}$

وكذلك $س - ٥ + \sqrt{٧} =$ صفر $\longrightarrow س = ٥ - \sqrt{٧}$

مجموعة الحل للمعادلة $= \{٥ - \sqrt{٧}$ ، $٥ + \sqrt{٧}\}$ "تحقق من صحة الحل"!!!

(ii) حل المعادلة التربيعية $أ س^٢ + ب س +$ جـ = صفر بطريقة اكمال المربع، عندما يكون $ب^٢ - ٤$ أ جـ $\leq$ صفر فقط سواء أكان مربع كامل أو لم يكن.

كون المعادلة التربيعية التي مميزها ليس مربع كامل لا تحلل الى العوامل أي لا يمكن ايجاد مجموعة الحل لها بواسطة التحليل الى العوامل هكذا:

حل المعادلة $س^٢ - ٤ س + ٢ =$ صفر

$ب^٢ - ٤$ أ جـ $= (- ٤)^٢ - ٤ \times ١ \times ٢ = ١٦ - ٨ = ٨ \leq$ صفر (نعم) أكبر من صفر

لكنه ليس مربع كامل اطلاقاً.

فلا يمكن ايجاد مجموعة الحل للمعادلة س^{٢} – ٤ س + ٢ = صفر بواسطة التحليل الى العوامل، وإنما هناك طريقة أخرى هي اكمال المربع Complete the Square: كما يلي:

س^{٢} – ٤ س = - ٢ نجعل المتغيرات بطرف والأعداد بطرف آخر.

نكمل الطرف الأيمن ليصبح مربع كامل بإضافة مربع نصف معامل س الى الطرفين

س^{٢} – ٤ س + (- ٢)^{٢} = (- ٢) + (- ٢)^{٢}

(س - ٢)^{٢} = - ٢^{٢} + ٤ = ٢

أي (س - ٢)^{٢} = ٢ ⟵ {(س - ٢)^{٢} - ٢} صفر

ومنها {(س - ٢) -$\sqrt{٢}$} {(س - ٢) +$\sqrt{٢}$} صفر

س - ٢ -$\sqrt{٢}$ = صفر ⟵ ٢ +$\sqrt{٢}$

س - ٢ +$\sqrt{٢}$ = صفر ⟵ س = ٢ -$\sqrt{٢}$

مجموعة الحل للمعادلة س^{٢} - ٤ س + ٢ = صفر هي:

{٢ -$\sqrt{٢}$ ، ٢ +$\sqrt{٢}$} تحقق إذا أردت.

مثال:

حل المعادلة ٢ س^{٢} + ٨ س - ١٠ = صفر بواسطة اكمال المربع.

نجعل معامل س^{٢} وحدة واحدة، بأن نقسم جميع المعادلة عليه (معامل س^{٢})

$$\frac{\text{س}^{٢} + ٨\ \text{س} - ١٠ = \text{صفر}}{٢}$$

س^{٢} + ٤ س - ٥ = صفر

س^{٢} + ٤ س = ٥

بإضافة مربع نصف معامل س الى الطرفين هكذا:

س^{٢} + ٤ س = ٥

+ (٢)^{٢} + (٢)^{٢}

س^{٢} + ٤ س + ٢^{٢} = ٥ + ٢^{٢}

(س + ٢)^{٢} = ٩

(س + ٢)^{٢} - ٩ = صفر

(س +٢ - ٣) (س + ٢ + ٣) = صفر

س = ١ ، س = - ٥

مجموعة الحل للمعادلة ٢س^{٢} + ٨ س - ١٠ = صفر هي {- ٥ ، ١}

والملاحظ أن طريقة التحليل طريقة خاصة لحل المعادلات التربيعية تستخدم عندما يكون ب^{٢} - ٤ أ جـ ≥ صفر ومربع كامل.

وطريقة اكمال المربع طريقة عامة لحل المعادلات التربيعية تستخدم عندما يكون ب^{٢} – ٤ أ جـ ≥ صفر فقط.

(iii) حل المعادلة التربيعية بطريقة القانون العام لحل المعادلات التربيعية:

لو أردنا حل المعادلة التربيعية بصورتها العامة أ س^{٢} + ب س + جـ = صفر بطريقة اكمال المربع لتوصلنا في النهاية الى قانون حل المعادلات التربيعية وهو:

$$\left\{ \frac{- ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ} ، \frac{- ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ} \right\}$$

ولما كان ب^{٢} - ٤ أ جـ هو مميز المعادلة.

تصبح مجموعة الحل للمعادلة أ س^{٢} + ب س + جـ = صفر هي:

$$\left\{ \frac{- ب - \sqrt{المميز}}{٢ أ} \quad \frac{- ب + \sqrt{المميز}}{٢ أ} \right\}$$

وطريقة الحل بالقانون طريقة عامة شرط أن يكون المميز ≥ صفر

ملحوظة:

عندما يكون المميز $ب^٢ - ٤ أ جـ > صفر$ للمعادلة جذران حقيقيان.

وعندما يكون المميز $ب^٢ - ٤ أ جـ = صفر$ للمعادلة جذران حقيقيان متساويان وكأنهما جذر واحد مكرر.

وعندما يكون المميز $ب^٢ - ٤ أ < صفر$ فلا يوجد للمعادلة جذور حقيقة (بل مركبة تناقش فيما بعد في حقل الأعداد المركبة).

مثال:

حل المعادلة $٢ س^٢ - ٥ س + ١ = صفر$ بالقانون العام

بما أن أ = ٢ ، ب = - ٥ ، جـ = ١

$$\text{فإن مجموعة الحل} = \left\{ \frac{-(-٥) - \sqrt{٢٥ - ٤ \times ٢ \times ١}}{٢(٢)} ، \frac{-(-٥) + \sqrt{٢٥ - ٤ \times ٢ \times ١}}{٢(٢)} \right\}$$

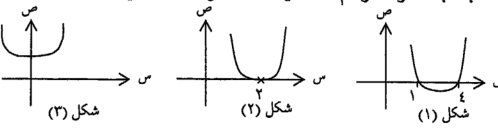
$$= \left\{ \frac{٥ - \sqrt{١٣}}{٤} ، \frac{٥ + \sqrt{١٣}}{٤} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{٥}{٤} - \frac{\sqrt{١٣}}{٤} ، \frac{٥}{٤} + \frac{\sqrt{١٣}}{٤} \right\}$$

(iv) حل المعادلة التربيعية $أ س^٢ + ب س + جـ = صفر$ بيانياً:

نمثل الاقتران المرافق الطرف الأيمن للمعادلة بيانياً ثم نجد أين يقطع منحناه محور السينات فتكون هي جذور المعادلة كما في هذه السطور:

نبدأ باستقراء الرسم كما في الأشكال الثلاثة الآتية:



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣)

انها أشكال ثلاثة لمنحنيات اقترانات المعادلات التربيعية المرافقة التالية:

شكل (١):

الاقتران ق (س) = $س^٢$ - ٥ س + ٤

المعادلة المرافقة $س^٢$ - ٥ س + ٤ = صفر

شكل (٢):

الاقتران هـ (س) = $س^٢$ - ٤ س + ٤

المعادلة المرافقة $س^٢$ - ٤ س + ٢ = صفر

شكل (٣):

الاقتران ل (س) = $س^٢$ + ٢

المعادلة المرافقة $س^٢$ + ٢ = صفر

وبعد استقراء الرسم نجد:

ان منحنى ق (س) يقطع محور السينات في النقطتين (١ ، ٠) ، (٤ ، ٠)

مجموعة الحل للمعادلة $س^٢$ - ٥ س + ٤ = صفر هي {١ ، ٤}

لذا للمعادلة المذكورة جذران حقيقيان هما ١ ، ٤

والجذر للمعادلة هو الاحداثي السيني لنقطة نق ح المنحنى مع محور السينات. ومنحنى هـ (س) يقطع محور السينات في النقطة (٢ ، ٠) لذا للمعادلة $س^٢$ – ٤ س + ٤ = صفر جذر واحد حقيقي أو جذران حقيقيان مكرران هما {٢}

ومنحنى ل (س) لا يقطع محور السينات اطلاقاً، لذا لا يوجد للمعادلة $س^٢$ + ٢ = صفر جذور حقيقية، مجموعة الحل لها = ϕ = { }.

مثال:

أوجد مجموعة الحل للمعادلة $س^٢$ - ٩ = صفر

نمثل منحنى الاقتران ق (س) = $س^٢$ - ٩ بيانياً بأخذ عدة نقاط. لكن بعد تعيين الاحداثي السيني لرأس القطع المكافئ (المنحنى الذي يمثل الاقتران التربيعي)

والرأس هو أعلى نقطة فيه كما في الشكل ⌒ (الرأس) وأخفض نقطة فيه كما في الشكل ◡ (الرأس) .

للاقتران ق (س) = أ $س^٢$ + ب س + جـ الطرف الأيمن للمعادلة التربيعية

أو الاقتران المرافق للمعادلة التربيعية

احداثيات الرأس ($\frac{-ب}{٢أ}$ ، ق ($\frac{-ب}{٢أ}$))

نجد الاحداثي السيني للرأس = $\frac{-٠}{٢ \times ١}$ = $\frac{-صفر}{٢}$ = صفر

ثم نقوم ببناء الجدول التالي:

س	+٢	+١	الرأس ٠	- ١	- ٢	
ق(س)	- ٥	- ٨	- ٩	- ٨	- ٥	

حيث النقط على أبعاد متساوية من الرأس هكذا :

كون الشكل سيكون متماثلاً حول محوره الرأس

الرأس

+٢   +١   ٠   - ١   - ٢

ق (٢) = ق(- ٢) = $(٢)^٢$ - ٩ = ٤ - ٩ = - ٥

ق (١) = ق(- ١) = $(١)^٢$ - ٩ = ١ - ٩ = - ٨

ق (٠) = $(٠)^٢$ - ٩ = - ٩

ومن الملاحظ لو كان الرسم دقيقاً

أن منحنى ق (س) يقطع محور السينات

في النقطتين - ٣ ، ٣

∴ جذرا المعادلة - ٣ ، ٣

مجموعة الحل للمعادلة {- ٣ ، ٣}

وبما أن التمثيل البياني غير دقيق في معظم الأحيان فإننا لا نستطيع الاعتماد على طريقة التمثيل البياني لإيجاد مجموعة الحل اطلاقاً، بل نعتمد الحلول الرياضية الجبرية كونها أدق وأقرب الى الصواب كثيراً.

(٧) والآن نود بيان كيفية تكوين المعادلة التربيعية اذا علم جذراها ودون اسهاب بالنظريات وبلا تعقيد بالحسابات.

وبما أن تكوين المعادلة التربيعية عملية عكسية لحلها ان جازت المقارنة. حيث:

حل المعادلة التربيعية ⟵ معناه ⟵ ايجاد جذرها بمعرفة المعادلة

فتكوين المعادلة التربيعية ⟵ معناه ⟵ ايجاد المعادلة بمعرفة جذورها

كما في القانون مباشرة.

س^{٢} – (مجموع الجذرين) س + حاصل ضربهما = صفر

مثال:

كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها ٣ ، - ٢

المعادلة: س^{٢} – (٣ + (- ٢)) س + (٣) (- ٢) = صفر

س^{٢} – (١ س) - ٦ = صفر

س^{٢} – س - ٦ = صفر (والتحقق من التكوين يكون عليها من جديد)

وهناك طريقة أخرى لتكوين المعادلة التربيعية وبالكيفية التالية:

ما المعادلة التربيعية التي جذراها $\frac{٣}{٧}$ ، $-\frac{٤}{٥}$ لتكوين المعادلة التربيعية؟

وكأننا نسير بعملية عكسية لحلها:

$\text{س} = \frac{٣}{٧}$ ، $\text{س} = -\frac{٤}{٥}$ من المعطيات، الجذران

أي أن $(\text{س} - \frac{٣}{٧}) = \text{صفر}$ ، $(\text{س} + \frac{٤}{٥}) = \text{صفر}$

ومنها $(\text{س} - \frac{٣}{٧})(\text{س} + \frac{٤}{٥}) = \text{صفر}$ وباستخدام قانون التوزيع:

$$\text{س}\,(\text{س} + \frac{٤}{٥}) - \frac{٣}{٧}\,(\text{س} + \frac{٤}{٥}) = \text{صفر}$$

$$٣٥\,(\text{س}^{٢} + \frac{٤}{٥}\,\text{س} - \frac{٣}{٧}\,\text{س} - \frac{١٢}{٣٥} = \text{صفر})$$

$$٣٥\,\text{س}^{٢} + ٢٨\,\text{س} - ١٥\,\text{س} - ١٢ = \text{صفر}$$

$$٣٥\,\text{س}^{٢} + ١٣\,\text{س} - ١٢ = \text{صفر}$$

أو باستخدام قانون التكوين السابق، تأكد من صحة الحل.

مثال:

ما المعادلة التربيعية التي جذراها ، $٢ + \sqrt{٥}$ ، $٢ - \sqrt{٥}$

الأفضل هنا استخدام قانون التكوين لوجود الجذور:

المعادلة: $\text{س}^{٢} - (٢ + \sqrt{٥} + ٢ - \sqrt{٥})\,\text{س} + (٢ + \sqrt{٥})(٢ - \sqrt{٥}) = \text{صفر}$

$$\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} + \{٤ - ٥\} = \text{صفر}$$

$\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} - ١ = \text{صفر}$ وللتحقق من صحة التكوين حلها من جديد.

ملحوظة لا بد منها في هذا السياق:

بما أن للمعادلة التربيعية أربع طرق لحلها وهي:

التحليل الى العوامل، اكمال المربع، القانون العام، التمثيل البياني.

أي هذه الطرق هو الأفضل ولماذا؟

الأفضل هو طريقة القانون العام، لأنها طريقة عامة مهما كان قيمة مميز المعادلة التربيعية، ولكن بشرط أن يكون ب^{٢} − ٤ أ جـ ≤ صفر وإلا حملها في حقل الأعداد المركبة كما سيمر لاحقاً.

والآن اذا كان أحد طرفي المعادلة التربيعية كسرٌ وعندها تسمى المعادلات الكسرية، فيجب التخلص من الكسر ثم حلها بأي طريقة من الطرق الأربع:

أوجد مجموعة الحل للمعادلة: $\frac{ص^{٢} - ١}{ص - ١} = \frac{ص + ١}{٢}$ بالضرب التبادلي

$٢ (ص^{٢} - ١) = (ص - ١) (ص + ١)$

$٢ ص^{٢} - ٢ = ص^{٢} - ١$

$٢ ص^{٢} - ص^{٢} - ٢ + ١ =$ صفر

$ص^{٢} - ١ =$ صفر

$(ص - ١) (ص + ١) =$ صفر

ص = − ١ ، ١

مجموعة الحل = {− ١ ، ١}

وللتحقق من صحة الحل: نأخذ ص = − ١

$\frac{(-١)^{٢} - ١}{- ١ - ١} \stackrel{؟}{=} \frac{- ١ + ١}{٢} \leftarrow \frac{١ - ١}{- ٢} \stackrel{؟}{=} \frac{- ١ + ١}{٢}$

$\leftarrow \frac{صفر}{- ٢} = \frac{صفر}{٢} =$ صفر

مثال تطبيقي:

ما هو العدد الحقيقي الذي إذا طرح مربع من كل من البسط والمقام للعدد النسبي $\frac{١}{٢}$ لأصبح الناتج مساوياً العدد النسبي $\frac{٣}{٢}$ ؟.

نفرض أن العدد الحقيقي هو س ،.

$\frac{١ - س^٢}{٢ - س^٢} = \frac{٣}{٢}$ وبالضرب التبادلي

٢ (١ −س^٢) = ٣ (٢ −س^٢)

٢ − ٢س^٢ = ٦ − ٣ س٢

٣ س^٢ - ٢ س^٢ = ٦ − ٢

س^٢ = ٤

س^٢ - ٤ = صفر

(س + ٢) (س - ٢) = صفر

س = - ٢ ، ٢

العدد (اما) - ٢ (أو) ٢

وللتحقق من صحة الكلام:

$\frac{١ - (- ٢)^٢}{٢ - (- ٢)^٢} = \frac{١ - ٤}{٢ - ٤} = \frac{- ٣}{- ٢} = \frac{٣}{٢}$ كما ورد بالسؤال أعلاه.

أو $\frac{١ - (٢)^٢}{٢ - (٢)^٢} = \frac{١ - ٤}{٢ - ٤} = \frac{- ٣}{- ٢} = \frac{٣}{٢}$ كما ورد بالسؤال أعلاه.

مثال:

ما قيمة جـ التي تجعل المعادلة التربيعية ٢س^٢ − ١٠ س + جـ = صفر جذرين متساويين؟

حتى يكون للمعادلة التربيعية جذران متساويان يجب أن يكون مميز المعادلة = صفر أي أن:

ب^٢ − ٤ أ جـ = صفر

وبما أن أ = ٢ ، ب = - ١٠ ، جـ = جـ

فإن $(-10)^2 - 4 \times 2 \times$ جـ = صفر

$100 - 8$ جـ = صفر

-8 جـ = -100

جـ = $\frac{-100}{-8} = \frac{25}{2}$

وللتحقق: $2(2$س$^2 - 10$ س $+ \frac{25}{2}$ = صفر) نجد مجموعة الحل للمعادلة:

4 س$^2 - 10$ س $+ 25$ = صفر

$(2$ س $- 5)(2$ س $- 5)$ = صفر

2 س $- 5$ = صفر ، 2 س $- 5$ = صفر

س = $\frac{5}{2}$ ، $\frac{5}{2}$ وهما جذران متساويان كما ورد بالسؤال.

هذا ويمكن أن تحتوي المعادلات جذوراً، فعند حلها يجب التخلص من الجذور أولاً، والتخلص من الجذور يكون برفعه الى أُس يساوي دليله بعد أن تجعله في طرف واحد من المعادلة، فالجذر التربيعي يُربّع هكذا $(\sqrt{\text{س}})^2$ = س والجذر التكعيبي يُكعب هكذا $(\sqrt[3]{\text{س}})^3$ = س ... الخ.

مثال:

حل المعادلة:

$(\sqrt{\text{س}^2 + 6\,\text{س}})^2 = (\text{س} + \sqrt{2\text{س}})^2$ بتربيع الطرفين

س$^2 + 6$ س = س$^2 + 2$ س $\sqrt{2\text{س}} + 2$ س وجعل الجذر لوحده.

$(6$ س $- 2$ س $= 2$ س $\sqrt{2\,\text{س}})$ بتربيع الطرفين

$(2 \cdot 2$ س $= 2$ س $\sqrt{2\,\text{س}})^2$

4 س^2 = س^2 $(2$ س$)$

$\cancel{2}$ س^2 = $\cancel{2}$ س^3

س^3 − ٢ س^2 = صفر

س^2 (س − ٢) = صفر

س = صفر ، س = ٢

مجموعة الحل = {٠ ، ٢} محقق من صحة الحل.

مثال:

حل المعادلة $\left(\frac{٤ - س}{\sqrt{س^2 - ٨ س + ٣٢}} = \frac{٣}{٥}\right)^2$ بتربيع الطرفين

$\frac{١٦ - ٨ س + س^2}{س^2 - ٨ س + ٣٢} = \frac{٩}{٢٥}$ بالضرب التبادلي

٤٠٠ − ٢٠٠ س + ٢٥ س^2 = ٩ س^2 − ٧٢ س + ٢٨٨

وبعد ترتيب حدود المعادلة:

(٢٥ س^2 − ٩ س^2) − ٢٠٠ س + ٧٢ س + ٤٠٠ − ٢٨٨ = صفر

١٦ س^2 − ١٢٨ س + ١١٢ = صفر بالقسمة على ١٦ ينتج أن:

س^2 − ٨ س + ٧ = صفر

(س − ١) (س − ٧) = صفر

س = ١ ، ٧

والتحقق بالجواب س = ٧ هو:

$\frac{٤ - ٧}{\sqrt{٤٩ - ٨(٧) + ٣٢}} \overset{؟}{=} \frac{٣}{٥} \longrightarrow \frac{- ٣}{\sqrt{٤٩ - ٥٦ + ٣٢}}$

$= \frac{- ٣}{\sqrt{٢٥}} = \frac{- ٣}{٥} \neq \frac{٣}{٥}$ الجواب مرفوض

والتحقق بالجواب ١: $\frac{\text{٤ - ١}}{\sqrt{\text{١ - ٨ + ٣٢}}} \overset{?}{=} \frac{\text{٣}}{\text{٥}} \leftarrow \frac{\text{٣}}{\sqrt{\text{٢٥}}} = \frac{\text{٣}}{\text{٥}}$

الجواب مقبول

مجموعة الحل = س = ١ فقط.

(٦- ٥) حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين:

نبدأ النقاش بهذا المثال:

اشترت سعاد دفتراً وقلماً بمبلغ ٨٠ قرشاً، ما ثمن الدفتر؟ وما ثمن القلم بالقروش؟

للوهلة الأولى فإن:

الجواب الصواب لن يُعرف على الاطلاق، واليك التفسير والتبرير:

لو فرضنا أن ثمن الدفتر س قرشاً

وأن ثمن القلم ص قرشاً

لتكونت المعادلة س + ص = ٨٠ قرشاً وهذه كما تعلم معادلة خطية بمتغيرين تحتاج الى حل، إذا أمكن.

وحتى نجد قيمة لأحدهما وليكن ص يجب أن نفرض قيمة للثاني ألا وهو س كما في الجدول التالي:

س	٤٥	٥٠	٦٠	٧٠	٣٠	... الخ
ص	٣٥	٣٠	٢٠	١٠	٥٠	... الخ

والملاحظ أن كل زوج من الأزواج المرتبة العديدة التالية:

(٤٥ ، ٣٥) ، (٥٠ ، ٣٠) ، (٦٠ ، ٢٠) ، (٧٠ ، ١٠) ، (٣٠ ، ٥٠)، ...

يمكن أن يكون جواباً لذلك السؤال المذكور أعلاه، وهناك حلول أخرى؛ لذا فإننا نلاحظ أن حلول المعادلة الخطية بمتغيرين س + ص = ٨٠ متعددة وتكاد تكون غير منتهية!!!

لكن وانسجاماً مع القاعدة التي تقول:

عدد المعادلات يجب أن يساوي عدد المتغيرات في النظام الواحد، حتى نتمكن من ايجاد الجواب الصواب الوحيد. فإذا علمنا أن ثمن الدفتر يزيد عن ثمن القلم بمبلغ ١٠ قروش لتكونت المعادلة:

س − ص = ١٠

ولأصبح لدينا نظاماً من المعادلات الخطية بمتغيرين يحتوي معادلتين هما:

س + ص = ٨٠ مجموع ثمني الدفتر والقلم هو ٨٠ قرشاً

س − ص = ١٠ الفرق بين ثمني الدفتر والقلم هو ١٠ قروش

فالجواب (وبالطريقة التجربة والخطأ) (أو التخمين) لن يكون إلاّ:

س = ٤٥ قرشاً ثمن الدفتر

ص = ٣٥ قرشاً ثمن القلم

كون ٤٥ + ٣٥ = ٨٠
و ٤٥ − ٣٥ = ١٠

ولكن الرياضيات لا تستخدم طريقة التجربة والخطأ أو التخمين إلا في بعض الأوقات، لذا وبشكل عام يشمل هذا النظام معادلتين خطيتين، كون عدد المعادلات = عدد المتغيرات وعلى الصورة:

أ$_1$ س + ب$_1$ ص = جـ$_1$

أ$_2$ س + ب$_2$ ص = جـ$_2$ لكل أ$_1$ ، أ$_2$ ، ب$_1$ ، ب$_2$ $\in$ ح

وطرق حل هذا النظام من المعادلات الخطية عديدة، وخطة الحل أن نجعل المعادلتين بمتغيرين معادلة واحدة بمتغير واحد كما في الطرق التالية:

(i) الحل بطريقة المقارنة:

مثال:

أوجد مجموعة الحل للنظام س + ٢ ص = ١ ⟵ (١)

س – ص = ٧ ⟵ (٢)

وطريقة الحل بشكل عام أن نجعل أحد المتغيرين وليكن س موضوع القانون في المعادلتين كما يلي:

س = ١ - ٢ ص   س موضوع القانون في المعادلة الأولى

س = ٧ + ص   س موضوع القانون في المعادلة الثانية

ومنهما معاً: ١ – ٢ ص = ٧ + ص   كون الطرف الأيمن لكل منهما متساوٍ

∴ - ٢ ص – ص = ٧ - ١

- ٣ ص = ٦

ص = $\frac{٦}{-٣}$ = - ٢

ومنها س = ١ - ٢ (- ٢) = ١ + ٤ = ٦

أو س = ٧ + (- ٢) = ٥

∴ مجموعة الحل= {(٥ ، - ٢)}

(ii) الحل بطريقة الحذف:

مثال:

أوجد مجموعة الحل للنظام
س + ٢ ص = ١
س – ص = ٧
} نفس النظام السابق

والحل يتمثل بحذف أحد المتغيرين وليكن ص مثلاً

ولحذف ص يجب أن يتساوى معاملا المتغير ص في المعادلتين. ويجب أن يختلفا بالاشارة هكذا:

١ (س + ٢ ص = ١) ⟵ (١) نضرب الأولى بمعامل ص ......

٢ (س – ص = ٧) ⟵ (٢) والعكس.

١ س + ٢ ص = ١ ⟵ (١)

جمعاً ٢ س – ٢ ص = ١٤ ⟵ (٢)

٣ س = ١٥

س = $\frac{١٥}{٣}$ = ٥

وهنا نحذف مرة أخرى س أو نعوض هكذا:

- ١ (١ س + ٢ ص = ١)

١ (١ س – ١ ص = ٧)

- ١ س - ٢ ص = - ١ ⟵ (١)

جمعاً ١ س – ١ ص = ٧ ⟵ (٢)

- ٣ ص = ٦

ص = $\frac{٦}{-٣}$ = - ٢

مجموعة الحل = {(٥ ، - ٢)}

(iii) الحل بطريقة التعويض:

مثال:

أوجد مجموعة الحل للنظام
$$\begin{cases} س + ٢ ص = ١ \\ س - ص = ٧ \end{cases}$$
النظام السابق نفسه .

وطريقة الحل أن نجعل أحد المتغيرين موضوع القانون أي هو بطرف وبقية المعادلة بطرف آخر. وليكون س مثلاً:

بما أن س + ٢ ص = ١ ⟵ (١)

فإن س = ١ - ٢ ص ، س موضوع القانون أو س بدلالة ص

ثم نعوض في الثانية بدل س هكذا:

(١ - ٢ ص) - ص = ٧ أصبحت المعادلتان واحدة وبمتغير واحد.

١ - ٢ ص - ص = ٧

١ - ٣ ص = ٧

- ٣ ص = ٧ - ١ = ٦

$$ص = \frac{٦}{-٣} = -٢$$

ومنها س = ١ - ٢ ص = ١ - ٢ (-٢) = ١ + ٤ = ٥

مجموعة الحل = {(٥ ، -٢)}

(iv) الحل بيانياً:

وهنا نعود الى كل معادلة لوحدها لتمثيلها بيانياً، فكل معادلة خطية متغيرين من النظام تمثل خط مستقيم وتشمل عدداً من الحلول اللانهائية هكذا:

أولاً: مثّل المعادلة س + ٢ ص = ١ بيانياً واكتب لها نفس ا لحلو؟

الحل:

نبدأ بتكوين الجدول التالي:

فعندما س = صفر ⟵ صفر + ٢ ص = ١ ⟵ ص = $\frac{١}{٢}$

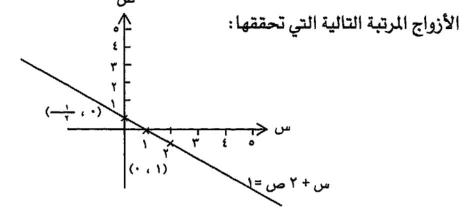
وعندما ص = صفر ⟵ س + ٢ (صفر) = ١ ⟵ س = ١

ونرتب النواتج كما في الجدول:

س	٠	١	
ص	$\frac{١}{٢}$	٠	

حلول هذه المعادلة لا تنتهي منها:

الأزواج المرتبة التالية التي تحققها:



مجموعة الحل للمعادلة الخطية الواحدة = { (٠ ، $\frac{١}{٢}$) ، (١ ، ٠) ، (٢ ، - $\frac{١}{٢}$)

، (- ١ ، ١) ، س + ٢ ص = ١ ...

ثانياً:

وبنفس الأسلوب تمثل المعادلة س – ص = ١ ويكون لها حلول لا نهائية

هكذا:

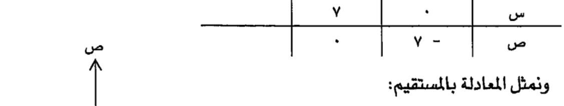
س – ٢ = ٧

نكون الجدول التالي:

عندما س = ٠ ⟵ صفر – ص = ٧ ⟵ ص = - ٧

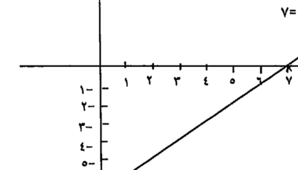
عندما ص = ٠ ⟵ س – صفر = ٧ ⟵ س = ٧

وندوّن النواتج في الجدول:



س	٠	٧	
ص	- ٧	٠	

ونمثل المعادلة بالمستقيم:



حلول هذه المعادلة لا تنتهي ومنها

الأزواج المرتبة التالية التي تحققها

مجموعة الحل للمعادلة الخطية الواحدة

س – ص = ٧ = {(٠ ، - ٧) ، (١ ، - ٦) ، (٢ ، - ٥) ، (٧ ، ٠) ، ...}

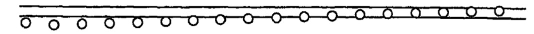
ثالثا:

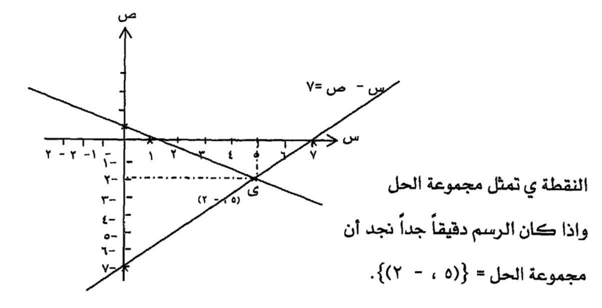
وأما النظام المكون من معادلتين س + ٢ ص = ١

س – ص = ٧ فله حل واحد:

انسجاماً مع القانون: عدد المعادلات = عدد المتغيرات

وطريقة الحصول على هذا الحل بيانياً هو أن نمثل المعادلتين بخطين مستقيمين وعلى نفس السطح البياني، ونجد احداثيات نقطة التقاطع كما في الشكل التالي:





النقطة ي تمثل مجموعة الحل

واذا كان الرسم دقيقاً جداً نجد أن

مجموعة الحل = {(٥ ، - ٢)}.

ملحوظة:

دوّنا في هذا المؤلف أربع طرق لحل نظام المعادلات الخطية بمتغير، علماً بأنه هناك طرق أخرى سيأتي مناقشتها في فصول أخرى من هذا المؤلف، لذا وجب التنويه.

ولكن أفضلها وأسهلها وأكثرها انتشاراً هي طريقة الحذف!!!

مثال تطبيقي:

أوجد مجموعة الحل للنظام:

$\frac{\text{س}}{\text{٤}} - \frac{\text{ص}}{\text{٣}} = \text{صفر}$ ⟵ (١)

١٠ س + ٤ ص + ١٣ = صفر ⟵ (٢)

نرتب المعادلات بعد أن نتخلص من الكسور كما يلي:

١٢ ($\frac{\text{س}}{\text{٤}} - \frac{\text{ص}}{\text{٣}} = \text{صفر}$) ⟵ ٣ س – ٤ ص = صفر ⟵ (١)

١٠س + ٤ ص = - ١٣ ⟵ (٢) جمعاً

---

١٣ س = - ١٣

١٣ س = - ١٣ ⟵ س = $\frac{١٣}{١٣}$ = - ١

لكن $\frac{س}{٤}$ - $\frac{ص}{٣}$ = صفر ⟵ $\frac{١ -}{٤}$ - $\frac{ص}{٣}$ = صفر

$\frac{١ -}{٤}$ = $\frac{ص}{٣}$ بالضرب التبادلي

٤ ص = - ٣

ص = $\frac{٣ -}{٤}$

مجموعة الحل = {(- ١ ، $\frac{٣ -}{٤}$)} تحقق من صحة الحل!

مثال تطبيقي آخر:

اشترت سلمى ٣ أقلام و٧ دفاتر بمبلغ ٤٤٠ قرشاً

واشترت سلوى ٧ أقلام و٣ دفاتر بمبلغ ٣٦٠ قرشاً

ما ثمن كل من القلم الواحد والدفتر الواحد؟ علماً بأنها جميعها متطابقة.

نفرض أن ثمن القلم س قرشاً ، وأن ثمن الدفتر ص قرشاً. تكون المعادلات هكذا :

٣ س + ٧ ص = ٤٤٠ (١)

٧ س + ٣ ص = ٣٦٠ (٢)

وبما أن أسهل طريقة لحل النظام هو الحذف، نحله بالحذف هكذا :

لحذف س

٧ (٣ س + ٧ ص = ٤٤٠) (١)

- ٣ (٧ س + ٣ ص = ٣٦٠) (٢)

٢١ س + ٤٩ ص = ٣٠٨٠

جميعاً - ٢١ س - ٩ ص = ١٠٨٠

٤٠ ص = ٢٠٠٠

ص = $\frac{٢٠٠٠}{٤٠}$ = ٥٠ قرشاً ثمن الدفتر

لحذف ص

٣ (٣ س + ٧ ص = ٤٤٠) (١)

- ٧ (٧ س + ٣ ص = ٣٦٠) (٢)

٩ س + ٢١ ص = ١٣٢٠

- ٤٩ س - ٢١ ص = ٢٥٢٠

- ٤٠ س = - ١٢٠٠

س = $\frac{١٢٠٠ -}{٤٠ -}$ = ٣٠ قرشا ثمن القلم

(٦- ٦) حل نظام من معادلتين، الأولى خطية والثانية تربيعية "بمتغيرين لكليهما":

يشمل هذا النظام معادلتين، كون عدد المتغيرات = عدد المعادلات ولكن أحدهما خطية بمتغيرين على الصورة أ س + ب ص = جـ

والثانية تربيعية بمتغيرين على الصورة أ $س^٢$ + ب $ص^٢$ = جـ

أو س ص = جـ

لكل أ ، ب ، جـ ∋ ح.

لذا فالصورة العامة لمعادلات النظام على شكلين:

الشكل الأول، حل النظام:

مثال:

س + ٢ ص = ٥ (١) خطية بمتغيرين

$س^٢$ + $ص^٢$ = ١٠ (٢) تربيعية بمتغيرين

الحل يكون بطريقة التعويض لعدم تشابه المعادلات.

نأخذ المعادلة الأسهل والأبسط وهي الخطية ونجعل س موضوع القانون هكذا:

س + ٢ ص = ٥

س = ٥ - ٢ ص س موضوع القانون

ثم نعوض في المعادلة الثانية $س^٢$ + $ص^٢$ = ١٠ بدل س هكذا:

$(٥ - ٢ص)^٢$ + $ص^٢$ = ١٠ أصبحت المعادلتان واحدة بمتغير واحد ولكن تربيعية.

وبعد التبسيط:

٢٥ - ٢٠ ص + ٤ ص^{٢} + ص^{٢} - ١٠ = صفر

٥ ص^{٢} - ٢٠ ص + ١٥ = صفر

∴ ص^{٢} – ٤ ص + ٣ = صفر

(ص - ١) (ص - ٣) = صفر

ومنها س = ٥ - ٢ ص

∴ س = ٥ - ٢ (١) = ٥ - ٢ = ٣

وكذلك س = ٥ - ٢ (٣) = ٥ - ٦ = - ١

} قيم س

مجموعة الحل = {(٣ ، ١) ، (- ١ ، ٣)}

الشكل الثاني، حل النظام:

مثال:

ص - ٢ س = صفر (١) خطية بمتغيرين

س ص = ٣٢ (٢) تربيعية بمتغيرين (وكأن س^{١} ص تكافئ س^{٢} أو ص^{٢})

والحل بطريقة التعويض أيضاً لعدم تشابه المعادلات.

هكذا: ص - ٢ س = صفر

أ = ٢ س بجعل ص موضوع القانون

ومنها س (٢ س) = ٣٢ تعويض الأخرى بدل ص

∴ ٢ س^{٢} = ٣٢

س^{٢} = ١٦

س^{٢} - ١٦ = صفر

(س + ٤) (س - ٤) = صفر

س = - ٤ ، ٤ قيم س

لكن ص = ٢ س = ٢ (- ٤) = - ٨

وكذلك ص = ٢ س = ٢ (٤) = ٨ قيم ص

مجموعة الحل= {(- ٤ ، - ٨) ، (٤ ، ٨)}

مثال تطبيقي:

بركة ماء مستطيلة الشكل مساحتها ٨٠ م² ومحيطها ٣٦ م احسب أبعادها:

الفرض كما في الشكل:

أ الطول = س د

العرض = ص العرض = ص

ب الطول = س جـ

محيط المستطيل = الطولين + العرضين

٢ س + ٢ ص = ٣٦ ← س + ص = ١٨ (١)

المساحة = الطول × العرض

س ص = ٨٠ (٢)

∴ س = ١٨ – ص ، س موضوع القانون

ومنها ص (١٨ – ص) = ٨٠ تعويض في المعادلة الأخرى

١٨ ص – ص٢ = ٨٠

∴ ص٢ – ١٨ ص + ٨٠ = صفر

(ص – ١٠) (ص - ٨) = صفر

ص = ١٠ ، ٨ العرض

لكن س = ١٨ – ص = ١٨ - ١٠ = ٨ الطول

أو س = ١٨ - ٨ = ١٠ الطول

أبعادها ١٠ م الطول

٨ م العرض

أو ٨ م الطول

١٠ م العرض

فالأبعاد ١٠ ، ٨ من الأمتار

(٦ - ٧) حل نظام من معادلتين تربيعتين بمتغيرين:

ومعادلاتها النظام على شكلين أيضاً هما:

مثال:

س ص = ١٨ (١) تربيعية

$س^2 + ص^2 = ٤٥$ (٢) تربيعية

والحل بالتعويض هو الأفضل لعدم تشابه المعادلات ومع هذا يمكن الحل بالحذف:

الحل بالتعويض:

بما أن س ص = ١٨ ⟵ (١)

$س = \frac{١٨}{ص}$ (ص موضوع القانون)

ونعوض في المعادلة الثانية هكذا:

$(\frac{١٨}{ص})^2 + ص^2 = ٤٥$ أصبحت المعادلتان معادلة واحدة المتغير واحد.

$ص^2 (\frac{١٨}{ص} + ص^2 = ٤٥)$

$٣٢٤ + ص^4 = ٤٥ ص^2$

$\therefore ص^4 - ٤٥ ص^2 + ٣٢٤ = صفر$

$(ص^2 - ٩)(ص^2 - ٣٦) = صفر$

أي أن (ص + ٣) (ص - ٣) (ص + ٦) (ص - ٦) = صفر

∴ ص = - ٦ ، - ٣ ، ٣ ، ٦ قيم ص

لكن $س = \frac{١٨}{ص} = \frac{١٨}{-٦} = -٣$

وكذلك $\frac{١٨}{-٣} = -٦$

وكذلك $\frac{١٨}{٣} = ٦$

وكذلك $\frac{١٨}{٦} = ٣$

مجموعة الحل= {(- ٣ ، - ٦) ، (- ٦ ، - ٣) ، (٦ ، ٣) ، (٣ ، ٦)}

وأما الحل بالحذف يكون كالتالي:

٥ (س ص = ١٨) ٥ س ص = ٩٠ (١)

٢ (س^{٢} + ص^{٢} = ٤٥) ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} = ٩٠ (٢)

ومنها ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} = ٥ س ص

٢ س^{٢} — ٥ س ص + ٢ ص^{٢} = صفر

(٢ س — ص) (س - ٢ ص) = صفر

س = $\frac{ص}{٢}$ ، ٢ ص

ثم نعوض في الأولى: س ص = ١٨

عندما س = $\frac{ص}{٢}$ ، ($\frac{ص}{٢}$) (ص) = ١٨

ص^{٢} = ٣٦

ص = - ٦ ، ٦

ومنها س = $\frac{ص}{٢}$ = $\frac{-٦}{٢}$ = - ٣

$\frac{٦}{٢}$ = ٣

وعندما س = ٢ ص ، (٢ ص) (ص) = ٢ ص^{٢} = ١٨

ص^{٢} = ٩

ص = - ٣ ، ٣

ومنها س = ٢ (- ٣) = - ٦

ومنها س = ٢ (٣) = ٦

∴ قيم س = - ٣ ، ٣ ، - ٦ ، ٦

وقيم ص = - ٦ ، ٦ ، - ٣ ، ٣

مجموعة الحل= {(- ٣ ، - ٦) ، (٣ ، ٦) ، (- ٦ ، - ٣) ، (٦ ، ٣)} نفس الحل السابق.

الشكل الثاني، حل النظام

مثال:

س^٢ – ص^٢ = ٩ (١)

س^٢ + ٩ ص^٢ = ١٦٩ (٢)

الحل بالحذف أفضل كون المعادلتان متشابهتين:

لحذف ص^٢

٩ (س^٢ – ص^٢ = ٩)

١ (س^٢ + ٩ ص^٢ = ١٦٩)

٩ س^٢ - ٩ ص^٢ = ٨١

س^٢ + ٩ ص^٢ = ١٦٩ جمعاً

١٠ س^٢ = ٢٥٠

س^٢ = ٢٥ ⟵ س^٢ - ٢٥ = صفر

(س + ٥) (س - ٥) = صفر

ص = - ٥ ، ٥ قيم س

ولإيجاد ص نحذف س هكذا:

$$س^2 - ص^2 = ٩$$

$$حذفاً \mp س^2 \mp ٩ ص^2 = ١٦٩$$

$$- ١٠ ص^2 = - ١٦٠$$

$$ص^2 = ١٦ \longrightarrow ص^2 - ١٦ = صفر$$

(ص + ٤) (ص - ٤) = صفر

ص = - ٤ ، ٤ قيم ص

مجموعة الحل = {(- ٥ ، - ٤) ، (٥ ، ٤) } تحقق من صحة الحل.

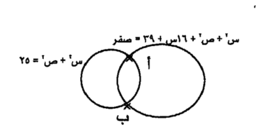
مثال تطبيقي:

أوجد نقط تقاطع الدائرتين $س^2 + ص^2 = ٢٥$

$$س^2 + ص^2 + ١٦ س + ٣٩ = صفر$$

هاتان معادلتان تشكلان نظاماً من المعادلات الخطية التربيعية.

نحل المعادلتين بالحذف كونهما متشابهتان:



$$س^2 + ص^2 + ١٦ س + ٣٩ = صفر$$

$$حذفاً \mp س^2 \mp ص^2 \qquad \pm ٢٥ = صفر$$

$$١٦ س + ٦٤ = صفر$$

$$١٦ س = - ٦٤$$

$$س = \frac{- ٦٤}{١٦} = - ٤$$

نعوض في احدى المعادلتين وتنص $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$ ⟵ $١٦ + ص^٢ = ٢٥$

$ص^٢ = ٢٥ - ١٦ = ٩$

ص = - ٣ ، ٣ نقط التقاطع أ (- ٤ ، ٣) ، ب (- ٤ ، - ٣)

(٦- ٨) حل نظام من ثلاث معادلات خطية بثلاثة متغيرات:

كون عدد المعادلات = عدد المتغيرات

وطريقة الحل بالحذف كون المعادلات الثلاث متشابهة لأنها خطية، والخطة أن نستخلص من المعادلات الثلاث معادلتين بمتغيرين ثم نستخلص منهما معادلة واحدة بمتغير واحد. كما يلي:

مثال:

أوجد مجموعة الحل للنظام:

س + ٤ ص - ٣ ع = - ٥ (١)

- س + ص + ٢ ع = - ١ (٢)

٢ س + ٣ ص — ع = صفر (٣)

ويشكل عام نحذف ع ثم ص لنجد س ثم ص ثم ع هكذا:

لحذف ع

٢ \ س + ٤ ص — ٣ع = - ٥ (١)

٣ / - س + ص + ٢ع = - ١ (٢)

نأخذ الأولى مع الثانية

٢ س + ٨ ص - ٦ ع = - ١٠ (١)

- ٣ س + ٣ ص + ٦ ع = - ٣ (٢) جمعاً

- س + ١١ ص = - ١٣ ← (٤)

وكذلك ١ س + ٤ ص - ٣ ع = - ٥ (١) ⎫
٣ ٢ س + ٣ ص - ع = صفر (٣) ⎭ والأولى مع الثانية

- ١ س - ٤ ص + ٣ ع = ٥ (١)

٦ س + ٩ ص - ٣ ع = صفر (٣) جمعاً

٥ س + ٥ ص = ٥ ← (٥)

وبهذا نكون استخلصنا من النظام السابق نظاماً يحتوي معادلتين بمتغيرين كما يلي:

لحذف ص

٥ - س + ١١ ص = - ١٤ (٤)

- ١١ ٥ س + ٥ ص = ٥ (٥)

- ٥ س + ٥٥ ص = - ٦٥ (٤)

- ٥٥ س - ٥٥ ص = - ٥٥ (٥) جمعاً

- ٦٠ س = - ١٢٠

س = (- ١٢٠) / (- ٦٠) = ٢ قيمة المتغير الأول

لكن ٥ س + ٥ ص = ٥ (٥)

∴ ٥ (٢) + ٥ ص = ٥

١٠ + ٥ ص = ٥

٥ ص = ٥ - ١٠ = - ٥

ص = $\frac{-٥}{٥}$ = - ١ قيمة المتغير الثاني

لكن س + ٤ ص - ٣ ع = - ٥ (١)

∴ ٢ + ٤ (- ١) - ٣ ع = - ٥

٢ - ٤ - ٣ ع = - ٥

- ٢ - ٣ ع = - ٥

- ٣ ع = - ٥ + ٢ = - ٣

ع = $\frac{-٣}{-٣}$ = ١ قيمة المتغير الثالث

مجموعة الحل = {(٢ ، - ١ ، ١)} وهذا يسمى ثلاثي مرتب.

مثال تطبيقي:

أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط الثلاث التالية أ(- ٦ ، ٢) ، ب (١ ، - ٣)، جـ (٤ ، ٦)

من المعلوم أن الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي:

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = صفر

وبما أن الدائرة تمر بالنقط أ ، ب ، جـ لذا فإن كل نقطة منها تحقق معادلة الدائرة، وبتعويض احداثيات كل من هذه النقط في معادلة الدائرة ينتج أن:

(- ٦)^{٢} + (٢)^{٢} + ٢ ل (- ٦) + ٢ ك (٢) + جـ = صفر

أي ٣٦ + ٤ - ١٢ ل + ٤ ك + جـ = صفر

أي - ١٢ ل + ٤ ك + جـ = - ٤٠ (١)

وكذلك (١)^{٢} + (- ٣)^{٢} + ٢ ل (١) + ٢ ك (- ٣) + جـ = صفر

أي ١ + ٩ + ٢ ل – ٦ ك + جـ = صفر

أي ٢ ل – ٦ ك + جـ = - ١٠ (٢)

ثم كذلك (٤)^{٢} + (٦)^{٢} + ٢ ل (٤) + ٢ ك (٦) + جـ = صفر

أي ١٦ + ٣٦ + ٨ ل + ١٢ ك + جـ = صفر

أي ٨ ل + ١٢ ك + جـ = - ٥٢ (٣)

وهذه المعادلات الثلاث تكافئ النظام

- ١٢ ل + ٤ ك + جـ = - ٤٠ (١)

٢ ل - ٦ ك + جـ = - ١٠ (٢)

٨ ل + ١٢ ك + جـ = - ٥٢ (٣)

والحل بالحذف:

لحذف جـ

- ١٢ ل + ٤ ك + جـ = - ٤٠ (١)

∓ ٢ ل ± ٦ ك ∓ جـ = ± ١٠ (٢)

- ١٤ ل + ١٠ ك = - ٣٠ (٤)

وكذلك - ١٢ ل + ٤ ك + جـ = - ٤٠ (١)

∓ ٨ ل ∓ ١٢ ك ∓ جـ = ± ٥٢ (٣)

- ٢٠ ل - ٨ ك = ١٢ (٥)

أصبحت المعادلات الثلاث اثنتين فقط هما :

لحذف ك

٨ × (- ١٤ ل + ١٠ ك = - ٣٠) (٤)

١٠ × (- ٢٠ ل - ٨ ك = ١٢) (٥)

- ١١٢ ل + ٨٠ ك = - ٢٤٠ (٤)

- ٢٠٠ ل - ٨٠ ك = ١٢٠ (٥)

- ٣١٢ ل = - ١٢٠

ل = $\frac{١٢٠}{٣١٢}$ = $\frac{٥}{١٣}$ ← ل = $\frac{٥}{١٣}$ قيمة ل

لكن - ٢٠ ل - ٨ ك = ١٢ (٥)

∴ −٢٠ ($\frac{٥}{١٣}$) − ٨ك = ١٢

١٣ (− $\frac{١٠٠}{١٣}$ − ٨ك = ١٢)

− ١٠٠ − ١٠٤ك = ١٥٦

− ١٠٤ك = ٢٥٦

ك = $\frac{٢٥٦}{-١٠٤}$ = − $\frac{٣٢}{١٣}$ ← ك = − $\frac{٣٢}{١٣}$ قيمة ك

لكن ٢ل − ٦ك + جـ = − ١٠ (٢)

∴ ٢ ($\frac{٥}{١٣}$) − ٦ ($\frac{-٣٢}{١٣}$) + جـ = − ١٠

١٣ ($\frac{١٠}{١٣}$ + $\frac{١٣٢}{١٣}$ + جـ = − ١٠)

١٠ + ١٣٢ + ١٣ جـ = − ١٣٠

١٣ جـ = − ١٣٠ − ١٤٢

١٣ جـ = − ٢٧٢

جـ = $\frac{-٢٧٢}{١٣}$ قيمة جـ

فتكون معادلة الدائرة:

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ($\frac{٥}{١٣}$) س + ٢ ($\frac{-٣٢}{١٣}$) ص − $\frac{-٢٧٢}{١٣}$ = صفر

١٣ (س^{٢} + ص^{٢} + $\frac{١٠}{١٣}$ س − $\frac{٦٤}{١٣}$ ص − $\frac{٢٧٢}{١٣}$ = صفر)

أي أن: ١٣ $س^٢$ + ١٣ $ص^٢$ + ١٠ س − ٦٤ ص − ٢٧٢ = صفر

(تحقق من تعويض النقط أ ، ب ، جـ في المعادلة الناتجة)

(٦ - ٩) أمثلة محلولة على المعادلات الجبرية

مثال (١):

باعتبار مجموعة الأعداد الطبيعية ط* هي مجموعة التعويض، اكتب مجموعة الحل كلٍ من الجمل المفتوحة التالية:

(i) س عدد طبيعي فردي؛

مجموعة الحل = {١ ، ٣، ٥ ، ٧ ، ...}

(ii) ص عدد طبيعي زوجي؛

مجموعة الحل = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ...}

(iii) ع عدد طبيعي أكبر من ٢٠؛

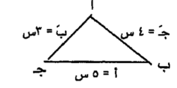
مجموعة الحل = {٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ...}

(iv) ل عدد طبيعي سالب:

مجموعة الحل={ } = ϕ حيث الأعداد الطبيعية جميعها على الإطلاق موجبة.

مثال (٢):

مثلث النسبة بين أضلاعه كنسبة ٣ : ٤ : ٥ ومساحته ٢٤ سم٢ أوجد أطوال أضلاعه؟



أطوال أضلاعه ٣ س ، ٤ س ، ٥ س

كون ٣ س: ٤ س : ٥ س = ٣ : ٤ : ٥ كما هو مفروض

مساحة أ ب جـ = $\sqrt{\text{ح (ح - أَ) (ح - بَ) (ح - جَ)}}$

حيث ح = $\frac{\text{أَ × بَ × جَ}}{٢}$ نصف المحيط

ح = $\frac{\text{٥ س + ٣ س + ٤ س}}{٢}$ = $\frac{\text{١٢س}}{٢}$ = ٦ س

$٢٤ = \sqrt{٦\ (س)\ (٦\ س - ٥\ س)\ (٦\ س - ٤\ س)\ (٩\ س - ٣\ س)}$

$٢٤ = \sqrt{(٦\ س)\ (س)\ (٢\ س)\ (٣\ س)}$

$٢٤ = \sqrt{٣ \times ٢ \times س \times س \times ٢\ س \times ٣\ س}$

$٢٤ = ٣ \times ٢ \times س \times س$

$٢٤ = ٦\ س^{٢}$

$س^{٢} = ٤ \qquad س = ٢$ سم مقدار المتغير س.

∴ $أَ = ٥\ (٢) = ١٠$ سم

$بَ = ٣\ (٢) = ٦$ سم

$جَـ = ٤\ (٢) = ٨$ سم

∴ أطوال أضلاعه = ٦ ، ٨ ، ١٠ من السنتمترات.

مثال (٣):

حل المعادلة $\frac{٢\ س^{٢} - ٨\ س - ٨}{٢} = \frac{صفر}{٢}$

$س^{٢} - ٤\ س - ٤ = صفر$

$أ = ١ \ ،\ ب = -٤ \ ،\ جـ = -٤$

المميز $ب^{٢} - ٤\ أ\ جـ = (-٤)^{٢} - ٤ \times ١ \times -٤ = ١٦ + ١٦ = ٣٢ \geq صفر$

تحل بالقانون أو اكمال المربع فقط:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤\ أ\ جـ}}{٢\ أ} = \frac{-(-٤) \pm \sqrt{٣٢}}{٢ \times ١}$$

$$= \frac{٤ \pm ٤\sqrt{٢}}{٢} = ٢ \pm ٢\sqrt{٢}$$

مجموعة الحل = $\{ ٢ - ٢\sqrt{٢} \ ،\ ٢ + ٢\sqrt{٢} \}$

مثال (٤):

ما قيمة جـ التي تجعل للمعادلة التربيعية س^{٢} + ١٠ س + جـ = صفر جذرين متساويين أو جذر مكرر؟

الحل:

يكون للمعادلة التربيعية أ س^{٢} + ب س + جـ = صفر جذرين متساويين أو جذر واحد مكرر عندما ب^{٢} − ٤ أ جـ = صفر

∴ كون أ = ١ ، ب = ١٠ ، جـ = جـ

∴ (١٠)^{٢} − ٤ × ١ × جـ = صفر

١٠٠ − ٤ جـ = صفر

٤ جـ = ١٠٠

جـ = ٢٥

مثال (٥):

صنف الجمل التالية الى: جمل صواب، جمل خطأ ، جمل مفتوحة:

(i) {٢} ∋ {٢، ٣، ٤} ⟵ جملة خطأ

(ii) $\frac{٣}{٢}$ = ٨ ⟵ جملة صواب

(iii) $\frac{س}{٨} = \frac{١}{٢} + \frac{٣}{٨}$ ⟵ جملة مفتوحة

مثال (٦):

أوجد مجموعة الحل للنظام:

$$\frac{س - ص + ١}{٣} = \frac{٢ س + ١}{٤} = ص$$

بعد الترتيب:

$\frac{س - ص + ١}{٣}$ = ص ، $\frac{٢ س + ١}{٤}$ = ص وبالضرب التبادلي

س − ص + ١ = ٣ ص ٢ س + ١ = ٤ ص

س − ٤ ص = − ١ (١) ٢ س − ٤ ص = − ١ (٢)

والحل بالحذف أسهل:

س − ٤ ص = − ١ (١)

طرحاً ∓ ٢ س ± ٤ ص = ± ١ (٢)

− س = صفر

س = صفر قيمة المتغير الأول

لكن $\frac{س - ص + ١}{٣}$ = ص

أي أن $\frac{صفر - ص + ١}{٣}$ = ص

٣ ص = − ص + ١

٤ ص = ١

ص = $\frac{١}{٤}$ قيمة المتغير الثاني

مجموعة الحل = {(٠ ، $\frac{١}{٤}$)} تحقق من صحة الحل.

مثال (٧):

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية:

(i) ٥ $س^٢$ + ٨ س + ٥ = صفر

نجد المميز: حيث أ = ٥ ، ب = ٨ ، جـ = ٥

$ب^٢$ − ٤ أ جـ = $(٨)^٢$ − ٤ × ٥ × ٥ = ٦٤ − ١٠٠ = − ٣٦ وحدة

فالمعادلة ليس لها حل في حقل الأعداد الحقيقية، ولكن لها حل في حقل الأعداد المركبة كما سيأتي فيما بعد.

(ii) $س = \frac{1}{س} = 3$ ، $س \neq$ صفر

بضرب كل المعادلة بالمتغير س هكذا:

$س(س - \frac{1}{س} = 3)$

$س^2 - 1 = 3س$ وبعد الترتيب

$س^2 - 3س + 1 =$ صفر

نجد المميز حيث أ = ١ ، ب = - ٣ ، جـ = ١

$ب^2 - 4أجـ = (-3)^2 - 4(1)(1) = 9 - 4 = 5 \geq$ صفر

بالقانون:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{2أ} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2 \times 1}$$

مجموعة الحل= $\{\frac{3 - \sqrt{5}}{2} ، \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\}$

مثال (٨):

اذا كان قياس الزاوية الكبرى في مثلث يساوي ضعفي قياس الزاوية الصغرى فيه، وكان قياس الزاوية الوسطى يساوي نصف مجموع قياسي الزاويتين الكبرى والصغرى، ما قياس كلّ من زواياه؟

بما أن مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية = ١٨٠°

فإن:

$س + ص + ع = 180$ (١)

$س = 2ع$ (٢)

$ص = \frac{س + ع}{2}$ (٣)

أ الكبرى س
ب الوسطى ص
جـ الصغرى ع

يحل هذا النظام بالحذف لتشابه المعادلات.

نعوض ص بالمعادلة الأولى:

٢ (س + $\frac{\text{س + ع}}{\text{٢}}$ + ع = ١٨٠°)

٢ س + س + ع + ٢ ع = ٣٦٠

٣ س + ٣ ع = ٣٦٠

―――――――

٣

س + ع + ١٢٠ (٤)

لكن ∓ س ± ٢ ع = صفر (٢) طرحاً

―――――――

٣ ع = ١٢٠

ع = $\frac{\text{١٢٠}}{\text{٣}}$ = ٤٠° قياس الزاوية الصغرى

س = ٢ ع = ٢ (٤٠) = ٨٠° قياس الزاوية الكبرى

لكن س + ص + ع = ١٨٠° ٨٠ + ص + ٤٠ = ١٨٠° ص = ٦٠° قياس الزاوية الوسطى.

∴ قياسات زواياه = {٨٠° ، ٦٠° ، ٤٠°} من الدرجات.

مثال (٩):

حل المعادلة $\frac{\text{٥ س − ٧}}{\text{٧ س − ٥}} = \frac{\text{س − ٥}}{\text{٢ س − ١٣}}$

بالضرب التبادلي:

(٥ س − ٧) (٢ س − ١٣) = (٧ س − ٥) (٧ − ٥) وبقانون التوزيع

٥ س (٢ س − ١٣) − ٧ (٢ س − ١٣) = ٧ س (س − ٥) − ٥ (س − ٥)

١٠ س^{٢} − ٦٥ س − ١٤ س + ٩١ = ٧ س^{٢} − ٣٥ س − ٥ س + ٢٥

وبعد نقل حدودهما الى طرف واحد هكذا:

١٠ س^{٢} – ٧ س^{٢} – ٦٥س – ١٤ س + ٣٥ س + ٥ س + ٩١ - ٢٥ = صفر

٣ س^{٢} – ٣٩ س + ٦٦ = صفر

٣

س^{٢} – ١٣ س + ٢٢ = صفر

وبالتحليل الى العوامل حيث المميز ب^{٢} – ٤ أ جـ = (٢٣)٢ - ٤ × ١ × ٢٢

= ٥٢٩ - ٨٨ = ٤٤١ ≤ صفر مربع كامل

(س - ٢) (س - ١١) = صفر

س = ٢ ، ١١

مجموعة الحل= {٢ ، ١١} تحقق من صحة الحل.

مثال (١٠):

عدد مؤلف من رقمين مجموعهما ٦ ، وإذا عكس وضع الرقمين زادت قيمة العدد ١٨ ، فما العدد؟

نفرض أن س رقم الآحاد

ونفرض أن ص رقم العشرات } فالعدد س + ١٠ ص

وعكس العدد ص + ١٠ ص

أولاً: مجموع الرقمين = ٦ ⟵ س + ص = ٦ (١)

ثانياً: العدد المعكوس = العدد الأصلي + ١٨

ص + ١٠ س = س + ١٠ ص + ١٨ (٢)

نرتب المعادلات هكذا:

لحذف ص

$9 \times$ س + ص = ٦ (١) ١٠ س − س + ص − ١٠ ص = ١٨

$1 \times$ ٩ س − ٩ ص = ١٨ (٢)

٩ س + ٩ ص = ٥٤ (١)

جمعاً ٩ س − ٩ ص = ١٨ (٢)

١٨ س = ٧٢

س = $\frac{٧٢}{١٨}$ = ٤ رقم الآحاد

ومن س + ص = ٦

∴ ٤ + ص = ٦

ص = ٦ − ٤ = ٢ رقم العشرات

فالعدد: س + ١٠ ص = ٤ + ١٠ (٢) = ٤ + ٢٠ = ٢٤

مثال (١١):

كوّن المعادلة التربيعية التي جذريها ٧ − $\sqrt{٢}$ ، ٧ + $\sqrt{٢}$

الحل:

المعادلة التربيعية هي:

س^{٢} − (٧ − $\sqrt{٢}$ + ٧ + $\sqrt{٢}$) س + (٧ − $\sqrt{٢}$) (٧ + $\sqrt{٢}$) = صفر

س^{٢} − ١٤ س + ٧ (٧ + $\sqrt{٢}$) − $\sqrt{٢}$ (٧ + $\sqrt{٢}$) = صفر

س^{٢} − ١٤ س + ٤٩ + ٧ $\sqrt{٢}$ − ٧ $\sqrt{٢}$ − ٢ = صفر

س^{٢} − ١٤ س + ٤٧ = صفر

مثال (١٢):

باستخدام الرسم البياني أوجد جذري المعادلة س^{٢} - ٢ س – ٣ = صفر

نرسم الاقتران ق (ر) = س^{٢} – ٤ س – ٣ هكذا:

س	٠	١	١ -	٢ -	٣	...
ق (ر)	٣ -	٤ -	٠	٥	٠	...

ق (- ١) = ١ + ٤ - ٣ = ٢

ق (- ٢) = ٤ + ٨ - ٣ = ٩

ونجد نقط تقاطعه مع محور السينات

فالجذرين - ١ ، ٣

مجموعة الحل = {- ١ ، ٣}

مثال (١٣):

أوجد مجموعة الحل للنظام:

٣ س – ص + ٢ ع = ٧ (١)

٢ س + ص – ع = ١ (٢)

٤ س + ٢ ص – ٣ ع = - ١ (٣)

لحذف ع

١ (٣ س – ص + ٢ ع = ٧) (١)

٢ (٢ س + ص – ع = ١) (٢)

٣ س – ص + ٢ ع = ٧ (١)

جمعاً ٤ س + ٢ ص – ٢ ع = ٢ (٢)

٧ س + ص = ٩ (٤)

لحذف ع أيضاً

٣ ، ٢

٣ س – ص + ٢ ع = ٧ (١)

٤ س + ٢ ص - ٣ ع = - ١ (٣)

٩ س – ٣ ص + ٦ ع = ٢١ (١)

جمعاً ٨ س + ٤ ص - ٦ ع = - ٢ (٣)

١٧ س + ص = ١٩ (٥)

لحذف ص

١ ، - ١

٧ س + ص = ٩ (٤)

١٧ س + ص = ١٩ (٥)

٧ س + ص = ٩ (٤)

جمعاً - ١٧ س – ص = - ١٩ (٥)

- ١٠ س = - ١٠

س = ١ قيمة س

لكن ٧ س + ص = ٩

∴ ٧ (١) + ص = ٩

ص = ٩ - ٧ = ٢ قيمة ص

لكن ٣ س – ص + ٢ ع = ٧

∴ ٣ (١) - ٢ + ٢ ع = ٧

٣ - ٢ + ٢ ع = ٧

٢ ع = ٧ - ١ = ٦

ع = $\frac{٦}{٢}$ = ٣ قيمة ع

مجموعة الحل= {(١ ، ٢ ، ٣)}

مثال (١٤):

عددان حقيقيان مجموع مربعيهما ٢٠٨ ومربع أحدهما يزيد عن ضعفي مربع الآخر بمقدار ١٦ ، فما العددان؟

نفرض العدد الأول س

ونفرض العدد الثاني ص

$س^2 + ص^2 = ٢٠٨$ (١)

$س^2 = ٢ ص^2 + ١٦$ (٢)

بعد الترتيب:

لحذف ص

٢ ($س^2 + ص^2 = ٢٠٨$) (١)

١ ($س^2 - ٢ص^2 = ١٦$) (٢)

$٢ س^2 + ٢ ص^2 = ٤١٦$ (١)

جمعاً $س^2 - ٢ ص^2 = ١٦$ (٢)

$٣ س^2 = ٤٣٢$

$س^2 = \frac{٤٣٢}{٣} = ١٤٤$

$س = \sqrt{١٤٤} = - ١٢ ، ١٢$

لكن $س^2 + ص^2 = ٢٠٨$ (١)

$١٤٤ + ص^2 = ٢٠٨$

$ص^2 = ٢٠٨ - ١٤٤ = ٦٤$

$ص = \sqrt{٦٤} = - ٨ ، ٨$

العددان: {(- ١٢ ، - ٨) أو (١٢ ، ٨)}

مثال (١٥):

قطعة أرض مستطيلة الشكل، مساحتها ١٨٠٠ متر مربع، وطول قطرها $٣٠\sqrt{٥}$ متر، فما أبعادها؟

الفرض كما في الشكل:

مساحة المستطيل = الطول × العرض

س ص = ١٨٠٠ (١)

وأما نظرية فيتاغورس فتقول:

$(أ\,جـ)^2 = (أ\,ب)^2 + (ب\,جـ)^2$

$(٣٠\sqrt{٥})^2 = س^2 + ص^2$

$\therefore$ $س^2 + ص^2 = ٤٥٠٠$ (٢)

فحل النظام: س ص = ١٨٠٠ (٢)

$س^2 + ص^2 = ٤٥٠٠$ (١) بالتعويض. هكذا:

$س = \frac{١٨٠٠}{ص}$ بجعل س موضوع القانون، ومن التعويض بالمعادلة الثانية

$\therefore$ $(\frac{١٨٠٠}{ص})^2 + ص^2 = ٤٥٠٠$ اجمع النظام معادلة واحدة :

$ق^2$ ($\frac{٣٢٤٠٠٠٠}{ص^2} + ص^2 = ٤٥٠٠$)

$٣٢٤٠٠٠٠ + ص^4 = ٤٥٠٠\,ص^2$

$\therefore$ $ص^4 - ٤٥٠٠\,ص^2 + ٣٢٤٠٠٠٠ = صفر$

$(ص^2 - ٩٠٠)(ص^2 - ٣٦٠٠) = صفر$

$\therefore$ $ص^2 = ٩٠٠$ ⟵ ص = ٣٠ متر البعد الأول

أو $ص^2 = ٣٦٠٠$ ⟵ ص = ٦٠ متر البعد الأول

لكن $س = \frac{١٨٠٠}{ص}$

عندما ص = ٣٠ فإن $س = \frac{١٨٠٠}{٣٠} = ٦٠$ متراً

وعندما ص = ٦٠ فإن س = $\frac{١٨٠٠}{٦٠}$ = ٣٠ متراً

فبعدا قطعة الأرض هما: ٣٠ ، ٦٠ متراً

مثال (١٦):

(i) حل المعادلة ١٨ - ٤ (٢ س - ٨) = ٦ (- ٣ س + ٧) + ١٦

بعد فك الأقواس والترتيب:

١٨ – ٨ س + ٣٢ = - ٨ س + ٤٢ + ١٦

- ٨ س + ٥٠ = - ١٨ س + ٥٨

+ ١٨ س – ٥٠ + ١٨ س – ٥٠

١٠ س = ٨

س = ٠,٨

(ii) حل المعادلتين:

الأولى: ٧ س + ٥ = ٣٣ ⟵ ٧ س = ٣٣ - ٥ = ٢٨

س = $\frac{٢٨}{٧}$ = ٤

الثانية: ٧ س - ٥ = ٣٣ ⟵ ٧ س = ٣٣ + ٥ = ٣٨

س = $\frac{٣٨}{٧}$ = $\frac{٣}{٧}$ ٥

مثال (١٧):

اذا كان ل ، م جذري المعادلة س^٢ – ٢$\sqrt{٣\text{س}}$ + ١ = صفر أوجد:

(i) ل ، م

المميز س^٢ - ٤أ = (- ٢$\sqrt{٣}$)^٢ - ٤ × ١ × ١ = ١٢ - ٤ = ٨ ≤ صفر وليس مربع كامل

الحل بالقانون:

$$\text{س} = \frac{-(-٢\sqrt{٣}) \pm \sqrt{٨}}{٢} = \frac{٢\sqrt{٣} \pm ٢\sqrt{٢}}{٢} = \sqrt{٣} \pm \sqrt{٢}$$

$\therefore$ $\text{ل} = \sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ ، $\text{م} = \sqrt{٣} - \sqrt{٢}$ أو العكس.

(ii) $\text{ل} + \text{م} = \sqrt{٣} + \sqrt{٢} + \sqrt{٣} - \sqrt{٢} = ٢\sqrt{٣}$

(iii) $\frac{١}{\text{ل}} + \frac{١}{\text{م}} = \frac{١}{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}}$ والجمع في حقل الأعداد الحقيقية فإن:

$$= \frac{١(\sqrt{٣} - \sqrt{٢}) + ١(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})}{(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})} = \frac{\sqrt{٣} - \sqrt{٢} + \sqrt{٣} + \sqrt{٢}}{٣ - ٢}$$

$$= \frac{٢\sqrt{٣}}{١} = ٢\sqrt{٣}$$

(iv) $\text{ل}^٢ + \text{م}^٢ = (\sqrt{٣} + \sqrt{٢})^٢ + (\sqrt{٣} - \sqrt{٢})^٢$ وفك الأقواس والمربعات معاً.

$$= ٣ + \cancel{٢\sqrt{٦}} + ٢ + ٣ - \cancel{٢\sqrt{٦}} + ٢$$

$$= ٥ + ٥ = ١٠$$

مثال (١٨):

عددان حقيقيان الفرق بينهما $٥\frac{١}{٤}$ ، والعدد الأصغر منهما هو $٤\frac{١}{٥}$ فما العدد الأكبر منهما؟

نفرض أن العدد الأكبر س والأصغر هو $٤\frac{١}{٥}$

الفرق بينهما = العدد الأكبر − العدد الأصغر هكذا:

$$\text{س} - ٤\frac{١}{٥} = ٥\frac{١}{٤}$$

$$\therefore \text{س} = ٥\frac{١}{٤} + ٤\frac{١}{٥} = \frac{٢١}{٤} + \frac{٢١}{٥}$$

$$= \frac{(٢١ \times ٥) + (٢١ \times ٤)}{٤ \times ٥} = \frac{١٠٥ + ٨٤}{٢٠}$$

$\text{س} = \frac{١٨٩}{٢٠} = ٩\frac{٩}{٢٠}$ العدد الأكبر.

مثال (١٩):

حل كلاً من المعادلات التالية:

(i) ١٦ – ٦ س – س^{٢} = صفر

المميز: ب٢ – ٤ أ جـ = (- ٦)٢ - ٤ × ١٦ × - ١

= ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠ ≤ صفر ومربع كامل

∴ تحلل الى العوامل.

(٨ + س) (٢ –س) = صفر

س = - ٨ ، ٢

مجموعة الحل= {- ٨ ، ٢}

(ii) ٦ س= ٢ س٢ - ١ بعد الترتيب

المميز: ب^{٢} - ٤ أ جـ = (- ٦)^{٢} - ٤ × ٢ × - ١ = ٣٦ + ٨ = ٤٤ ≤ صفر بالقانون

٢س^{٢} - ٦ س - ١ = صفر

٩ س + ٤٥ - ١٢ √((س + ٥) (٢ س+ ٨)) + ٨ س + ٣٢ = س - ٣

١٧ س + ٧٧ - ١٢ √((س + ٥) (٢ س + ٨)) = س - ٣

١٧ س + ٧٧ – س + ٣ = ١٢ √((س + ٥) (٢ س + ٨))

١٦ س + ٨٠ = ١٢ √((س + ٥) (٢ س + ٨)) بالقسمة على ٤

(٤ س + ٢٠ = ٣ √((س + ٥) (٢ س + ٨)))

١٦ س^{٢} + ١٦٠س + ٤٠٠ = ٩ (س + ٥) (٢ س + ٨)

١٦ س^{٢} + ١٦٠س + ٤٠٠ = ٩ {٢ س^{٢} + ١٨ س + ٤٠)

١٦ س^{٢} + ١٦٠س + ٤٠٠ = ١٨ س^{٢} + ١٦٢ س + ٣٦٠

١٨ س^{٢} – ١٦س^{٢} + ١٦٢ س - ١٦٠ س + ٣٦٠ – ٤٠٠ = صفر

$٢ س^٢ + ٢س - ٤٠ = صفر$

$س^٢ + س - ٢٠ = صفر$

(س + ٥) (س - ٤) = صفر

س = - ٥ ، ٤

مجموعة الحل= {- ٥ ، ٤}

مثال (٢٠):

اذا كانت ف= $\frac{٩}{٥}$ س + ٣٢

حيث: ف° درجة الحرارة الفهرنهاتية   س° درجة الحرارة السيليسيوية

اجعل المتغير س موضوع القانون ثم جد قيمته عندما ف = ٢١٢°

الحل:

ف = $\frac{٩}{٥}$ س + ٣٢

- ٣٢   - ٣٢

(ف - ٣٢ = $\frac{٩}{٥}$ س) بضرب جميع الأطراف العدد الحقيقي $\frac{٩}{٥}$ هكذا:

$\frac{٩}{٥}$ (ف - ٣٢) = س

س = $\frac{٥}{٩}$ (ف - ٣٢)   س موضوع القانون

وعندما ف = ٢١٢°

فإن: س = $\frac{٥}{٩}$ (٢١٢ - ٣٢) = $\frac{٥}{٩}$ (١٨٠) = ١٠٠ س°

ملحوظة:

اذا كانت درجة حرارة جسم الانسان ٣٧ س° فما مقدارها بالفهرنهايت؟

ف = $\frac{٩}{٥}$ س + ٣٢ = ($\frac{٩}{٥}$) (٣٧) + ٣٢ = $\frac{٣٣٣}{٥}$ + ٣٢

= ٦٦,٦ + ٣٢ = ٩٨,٦° ف

(٦- ١٠) أسئلة وتدريبات وقوانين تتطلب حلولاً من الدارسين

(١) حل المعادلات التالية:

(i) ٥ $س^٢$ - ٣ س - ٢ = صفر

(ii) ٥ $س^٢$ - ٣ س - ١ = صفر

(iii) ٥س + ٣ ص = ٧ س – ٣ص = - ٢

$\{\frac{-٢}{١١} ، \frac{-٤}{١١}\}$

(٢) اجعل ك موضوع القانون فيما يلي:

$$\frac{١}{س + ٢ ك} + \frac{١}{ص + ٢ ك} = \frac{١}{ك}$$

(٣) حل المعادلة:

$$\frac{١}{٥} (٤ س + ١) - \frac{١}{٣}(٦ س - \frac{١}{٥}) \frac{١}{١٣} (٢ س + ٣٩)$$

(٤) أوجد مجموعة الحل لأنظمة المعادلات التالية:

(i) ٧ س – ٢ ص = ٣٠ ، ٤ س – ٣ ص = ٥٠

(ii) ٢٤ س + ٣٧ ص + ٢٥ ع = ٣٥

٧٢ س + ٧ ص – ٣٢ ع = - ١٢

٤١ س – ٤٢ ص + ٦ ع = ٣٨

(٥) أوجد مجموعة الحل للنظام:

٣ س – ص = - ٥

٦ س + ٥ ص = ٤

{(- ١ ، ٢)}

(٦) حل المعادلة:

٥ س = (٥٧)^{٢} – (٥٢)^{٢} {١٠٩}

(٧) حل المعادلة:

٥ س (س - ٣) = ٢ (س - ٧)

(٨) قال همام: اشتريت عربة وحصان بمبلغ ٧٥ دينار، ثم بعت العربة بمكسب ٢٠٪ والحصان بمكسب ١٦٪ فإذا كان مكسبي الكلي في بيع العربة والحصان ١٦٪ فبكم دينار اشتريت الحصان؟

{ ٢٠ دينار }

(٩) حل النظام التالي من المعادلات:

٨ س + ٩ ص = ٤٢ س ص

٩ س + ٨ ص = ٤٣ س ص

{ (٠ ، ٠)، ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$) }

(١٠) حل المعادلة $\frac{س + ٣}{س - ١}$ + $\frac{س - ٤}{س - ٦}$ = ٢

{ $\frac{١٣}{٣}$ }

(١١) حل النظام:

$\frac{٢}{٥}$ س + $\frac{١}{٤}$ ص = ١٣

$\frac{١}{٣}$ س - $\frac{١}{٨}$ ص = ٣

{ (١٥ ، ١٦) }

(١٢) حل المعادلة $\frac{س^{٢} - ٦}{س}$ + $\frac{٥ س}{س^{٢} - ٦}$ = ٦ { ٦ ، - ١ ، ٣ ، - ٢ }

{ارشاد: افرض ص = $\frac{س^{٢} - ٦}{س}$}

(١٣) ما قيمة الثابت "جـ" في المعادلة ٣ س^2 – ٦ س + جـ = صفر لتكون جذور المعادلة متساوية أو متطابقة. { ٣ }

{ ارشاد: ب^2 - ٤ أ جـ = صفر حيث ب^2 - ٤ أ جـ يسمى المميز }

(١٤) كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها:

(i) { $\frac{٣}{٧}$ ، - $\frac{٤}{٥}$ } {٣٥ س^2 + ١٣ س - ١٢ = صفر}

(ii) { ٢ + $\sqrt{٣}$ ، ٢ - $\sqrt{٣}$ } {س^2 – ٤ س + ١ = صفر }

(١٥) حل المعادلات:

(i) ٢ $\sqrt{س}$ - $\sqrt{٤ س - ١١}$ = ١ {١٣٣٦ }

(ii) $\frac{٦\sqrt{س} - ١١}{٤\sqrt{س}}$ = $\frac{٢\sqrt{س} + ١}{\sqrt{س} + ٦}$ { ٩ }

(١٦) حل المعادلة:

$\frac{س^2 + س - ٢}{س - ٢}$ = $\frac{٤ س^2 + ٥س - ٦}{س + ٥}$ {٠ ، - ٢}

{ ارشاد: جزئ كل طرف }

(١٧) حل المعادلة $\frac{٦ س - ٣}{٢ س + ٧}$ = $\frac{٣ س - ٢}{س + ٥}$ { $\frac{١}{١٠}$ }

والمعادلة س^2 – ٧ س = ٨ { - ١ ، ٨ }

والمعادلة س + ٦ = ٣ (٥٤ – س) { ٣٩ }

(١٨) ما العدد الطبيعي الذي اذا ضُعِّف مرتين ثم طُرح من الناتج ٣ أصبح مساوياً ٣ أمثال العدد نفسه ناقصاً العدد - ؟٩ { ٦ }

(١٩) مستطيل محيطه ٣٠ م ومساحته ٥٠ م^2 أوجد أبعاده.

(٢٠) قارب تجاري سرعته في الماء الراكد ١٢ كم / ساعة فإذا قطع صاحبه مسافة ٣٥ كيلومتر ذهاباً وإياباً في الماء الجاري بمدة ٦ ساعات. احسب سرعة تيار الماء الجاري. { ٢ }

(٢١) كسرٌ عادي (عدد نسبي) مجموع بسطه ومقامه يساوي ٥ ، وإذا أضيف اليه $\frac{١}{٣}$ أصبح الكسر $\frac{١١}{٦}$ ، فما هو الكسر؟

{ $\frac{٣}{٢}$ }

(٢٢) ما العددان الحقيقيان اللذان مجموعهما (٧٣) والفرق بينهما (٣٧)؟

{ ٥٥ ، ١٨ }

(٢٣) أوجد مجموعة الحل للنظام:

$$\frac{٣٠}{س} = \frac{٣٠}{ص} + ٣$$

$$\frac{٣٠}{٢ س} = \frac{٣٠}{ص} - ٢$$

{ ($\frac{٣٠}{٧}$ ، ٣٠) }

(٢٤) أوجد مجموعة الحل للنظام:

٦ س + ٢ ص − ٥ ع = ١٣ (١)

٣ س + ٣ ص − ٢ ع = ١٣ (٢)

٧ س + ٥ ص − ٣ ع = ٢٦ (٣) {١ ، ٢ ، ٣}

(٢٥) حل المعادلة $\frac{٤ س}{٥} - \frac{٣}{١٠} = \frac{س}{٥} + \frac{س}{٤}$

{ $\frac{٦}{٧}$ }

(٢٦) أوجد مجموعة الحل للنظام:

٣ س + ٧ ص = ٢٧ (١)

٥ س + ٢ ص = ١٦ (٢) {(٢ ، ٣)}

وللنظام:

س + ص = ١ (١)

س – ٦ ص = - ٢٧ (٢) {(- ٣ ، ٤)}

وللمعادلة:

٥ (س - ٣) - ٧ (٦ –س) = ٢٤ - ٣ (٨ –س) - ٣

{٦}

وللنظام:

س – ٢ ص = ١ (١)

٢ س^{2} – ٣ س ص + ص^{2} = ٤

(٢٧) حل النظام:

٢س + ص = ١٠ (١)

س^{2} + ٣ ص٢ = ٢٨ (٢)

{(٥,٢ ،- ٠,٤) ، (٤ ، ٢)}

(٢٨) زاويتان متتامتان، اذا كان قياس احدهما يزيد ٣٦° على ضعفي قياس الأخرى، فجد قياس كل منهما.

{٧٢ °، ١٨°}

(٢٩) حل النظام:

٨ س + ١٢ ص = ٢٨ (١)

١٢ س + ص = ٩٠ (٢) {(- ١ ، ٣)}

والنظام ٢ س - ٢ ص = $\frac{١}{٢}$ (١)

- ٢ س + ٥ ص = - $\frac{٥}{٢}$ (٢)

{(- $\frac{٥}{١٢}$ ، - $\frac{٨}{١٢}$)}

(٣٠) أوجد مجموعة الحل للمعادلة (٢ + $\sqrt{٢}$) س = ٣ + $\sqrt{٣}$ {١,٤}

{ ارشاد: اعتبر $\sqrt{٢}$ = ١,٤ ، $\sqrt{٣}$ = ١,٧ ، $\sqrt{٦}$ = ٢,٤ }

(٣١) اذا كانت أ = ١ + ٢$\sqrt{٢}$

ب = ٣ + ٤$\sqrt{٢}$

فأوجد مجموعة الحل للمعادلة أ س = ب في حقل الأعداد الحقيقية.

{ $\frac{٩}{٧}$ + $\frac{٢\sqrt{٢}}{٧}$ }

(٣٢) أوجد مجموعة الحل للمعادلة التالية:

(i) $س^٢$ – ٦ س - ٢ = صفر {٣ ± $\sqrt{١١}$}

(٣٣) كوّن المعادلة التي جذراها ٧ - ٢$\sqrt{٥}$ ، ٧ + ٢ $\sqrt{٥}$

{$س^٢$ – ١٤ س + ٢٩ = صفر}

(٣٤) أوجد مجموعة الحل للنظام:

(م + ١) س + ص = م

٣ س + (م - ١) ص = ٢ حيث م عدد ثابت

{ $\frac{م + ١}{م + ٢}$ ، $\frac{- ١}{م + ٢}$ }

(٣٥) أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات:

(١) $\frac{س}{٣} = \frac{١٩}{٥٧}$ $\{١\}$

(٢) $\frac{٥ س}{٣} = \frac{٣}{٤}$ $\{\frac{٩}{٢٠}\}$

(٣) $\frac{س}{٤,٥} = \frac{١,٣}{٠,٣}$ $\{\frac{٣٩}{٢}\}$

(٤) $\frac{٣ س}{١٤} = \frac{٩}{٣٥}$ $\{- \frac{٢}{٥}\}$

(٣٦) حل المعادلة $(١ + ٢\sqrt{٢})$ س = $٣ + ٤\sqrt{٢}$

(٣٧) أوجد احداثيات نقطة تقاطع المستقيمين:

$ل_١$: ٢ س - ٧ ص + ٣١ = صفر

$ل_٢$: س − ٢ ص + ٧ = صفر

$\{(\frac{١٣}{٣} ، \frac{١٧}{٣})\}$

{ارشاد: حل معادلات النظام}

(٣٨) ما قياس كل زاوية من زوايا المثلث أ ب جـ كما في الشكل:



{٤٠° ، ٦٠° ، ٨٠°}

(٣٩) ما قيمة العدد الطبيعي جـ ليكون للمعادلة $س^٢$ − جـ س − ١٥٢ = صفر حل في مجموعة الأعداد الطبيعية ط

{جـ = ١١ والحل س = ١٩}

(٤٠) أوجد مجموعة الحل للنظام:

س^{٢} − ص^{٢} = ١٢٠ (١)

س^{٢} + س ص = ٢٤٠ (٢) {(± ٤ $\sqrt{١٠}$ ، ± ٢ $\sqrt{١٠}$)}

{ ارشاد: تحليل وقسمة }

(٤١) أوجد مجموعة الحل للمعادلات التالية وكل على انفراد:

(١) ٤ س^{٢} − ٢٤ س + ٣٥ = صفر { $\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٧}{٢}$ }

(٢) ١٨ س^{٢} + ٤٥ س + ٢٨ = صفر { −$\frac{٧}{٦}$ ، −$\frac{٤}{٣}$ }

(٤٢) عددان حقيقيان أحدهما نصف الآخر بالتمام، واذا طُرح العدد الأكبر من مربع العدد الأصغر يكون الناتج مساوياً لخمسة أمثال مجموعهما. فما العددان؟

{ ١٧ ، ٣٤ }

(٤٣) مجموع عدد حقيقي ومقلوبه $\frac{١٣}{٦}$ فما العدد وما مقلوبه؟

{ { $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$ } ، { $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ } }

(٤٤) حل المعادلة التالية:

$\sqrt{\text{٣س + ١}}$ = $\sqrt{\text{٣ + س}}$ { ١ }

والمعادلة التالية ايضاً:

٣ (٤ س + ١) − ٢ (٣ س − ٥) = ٢٢ { $\frac{٣}{٢}$ }

(٤٥) أوجد مجموعة الحل للمعادلة $س^٢ = س$ { ٠ ، ١ }

والمعادلة التالية ايضاً:

$٨ س^٣ + ٣ = ١٢٨$ { $\frac{٥}{٢}$ }

(٤٦) ما العدد الحقيقي الذي اذا طُرح منه ١٨ أصبح مساوياً لمعكوسه (سالبه) مضافاً اليه ٨ ؟ { ١٣ }

(٤٧) وجد الطفل حسّان في حصالته ليلة عيد الميلاد المجيد ٢٤ قطعة من النقود، فإذا كان عدد القطع ذات الربع دينار تساوي عدد القطع ذات النصف دينار وعدد القطع ذات العشرة قروش تزيد بست قطع عن القطع ذات الربع دينار، كما ديناراً وجد حسان في حصالته؟

{٥,٧ دينار }

(٤٨) إذا كانت $أ = \frac{٣}{٥} س - \frac{٤}{٥} ص$

$ب = \frac{٤}{٥} س - \frac{٣}{٥} ص$

ما قيمة كل من المتغيرين س ، ص بدلالة أ ، ب

{ $\frac{٢٠ ب - ١٥ أ}{٧}$ ، $\frac{١٥ ب - ٢٠ أ}{٧}$ }

(٤٩) أوجد احداثيات نقط تقاطع الدائرتين:

$س^٢ + ص^٢ + ٦ س - ٧ = صفر$

$س^٢ + ص^٢ - ٤ س - ٥ = صفر$

{($\frac{١}{٥}$ ، $\frac{\sqrt{٥١}}{٥}$) ، ($\frac{١}{٥}$ ، $\frac{\sqrt{٥١}}{٥}$)}

{ ارشاد: حل المعادلتين معاً }

(٥٠) سبيكة من الذهب Au مستطيلة الشكل مساحة سطحها ٢ سم^{2} وطول محيطها ٦ سم، ما بعداها؟ {٢ ، ١ سم}

(٥١) أوجد مجموعة الحل للنظام:

$$\frac{1}{س} - \frac{1}{ص} = \frac{1}{4} \quad ، \quad س ص = 8$$

{(-٤ ، -٢) ، (٢ ، ٤)}

(٥٢) أوجد مجموعة الحل للنظام:

$$س + ص + ع = 144$$

$$\frac{1}{2} س = \frac{1}{3} ص = \frac{1}{7} ع$$

{٢٤ ، ٣٦ ، ٨٤}

(٥٣) أرادت أم مهران أن تجهز لأطفالها الصغار وجبة من الطعام تحتوي الأرز والسكر والحليب بالاضافة الى الماء، وعندما ذهبت الى السوبرماركت القريب لتستفسر عن الأسعار اجابها البائع بكل احترام: ان ثمن (٢) كغ سكر و (٣) كغ أرز و (١) كغ حليب = ٤ دنانير. وان ثمن (٣) كغ سكر و (٢) كغ حليب يزيد بمقدار ٣ دنانير ونصف عن ثمن (٢) كغ أرز، ثم ان ثمن (٤) كغ حليب يزيد عن ثمن (٣) كغ سكر و (٢) كغ أرز بثلاثة دنانير ونصف. ما ثمن الكغ الواحد من كل نوع بالدنانير؟

$$\left\{ \frac{1}{2} ، \frac{1}{2} ، \frac{3}{2} \right\}$$

(٥٤) استعن بالشكل لايجاد قيمة س

هـ ، ٣ سم ، د ، ٦ – س سم ، جـ ، س سم ، ب ، ٢ سم ، أ

$$\left\{ \frac{11}{4} \right\}$$

(٥٥) ركب المعادلة التربيعية الى جذراها:

٥ - $\sqrt{٦}$ ، ٥ + $\sqrt{٦}$ $\{$ س^{٢} - ١٠ س + ١٩ = صفر$\}$

(٥٦) حل المعادلات التالية:

(١) (س^{٢} + $\frac{١}{س^{٢}}$)^{٢} + ٤ (س^{٢} + $\frac{١}{س^{٢}}$) - ١٢ = صفر

$\{$ ارشاد: افرض ض = (س^{٢} + $\frac{١}{س^{٢}}$) $\}$

(٢) $\frac{\sqrt{س} + ٥}{\sqrt{س} - ٧}$ = $\frac{\sqrt{س} - ٥}{\sqrt{س}}$ $\{ \frac{١٢٢٥}{٢٨٩} \}$

(٥٧) أوجد مجموعة الحل لكل نظام من أنظمة المعادلات التالية:

(١) $\frac{٣}{١١}$ س + $\frac{٢٣}{س + ٤}$ = $\frac{١}{٣}$ (س + ٥)

(٢) ٢ س^{٢} − ٣ ص^{٢} = ٢٣ ⟵ (١)

٢ س ص - ٣ ص^{٢} = ٣ ⟵ (٢)

(٣) ٢ س + ٣ ص = $\frac{٣}{٢}$ ⟵ (١)

٤ س^{٢} + ٩ س ص + ٩ ص^{٢} = ١١ ⟵ (٢)

(٤) $\frac{س - ٥}{س - ٦}$ - $\frac{س - ٦}{س - ٧}$ = $\frac{س - ١}{س - ٢}$ - $\frac{س - ٢}{س - ٣}$ $\{ \frac{٩}{٢} \}$

(٥) ٥$\sqrt{٣ س}$ - ١ = $\sqrt{٧٥ س - ٢٩}$ $\{٣\}$

(٦) س^{٣} − ص^{٣} = ٢٨ ⟵ (١)

س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٧ ⟵ (٢)

(٧) ٧س - ٩ ص + ٤ ع = ١٦ ⟵ (١)

$\frac{س + ص}{٣} = \frac{س + ص + ع}{٢}$ ⟵ (٢)

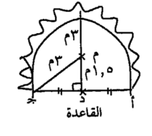
٢ س - ٣ ص - ٥ = صفر ⟵ (٣)

(٨) ٦ س + ٧٥ س - ١٦ = ٥٨٣ س + ٥

(٥٨) عند اضافة العدد ١ الى بسط ومقام كسر عادي يصبح $\frac{٣}{٢}$ ، وعند طرح العدد ١ من بسط ومقام الكسر نفسه ليصبح $\frac{٢}{١}$ ، فما قيمة هذا الكسر العادي؟ { $\frac{٥}{٣}$ }

{ارشاد : افرض البسط س والمقام ص }

(٥٩) يمثل الشكل مدخلاً لنفق أرضي على شكل قوس. احسب عرض قاعدة النفق أ جـ



{ ٥,١٩٦ }

(٦٠) ثلاثة أعداد صحيحة مجموعها ٨ ، فإذا كان مثلاً العدد الأول مضافاً اليه العدد الثالث يزيد بمقدار ٣ عن العدد الثاني، ومجموع مثلي العدد الثاني وثلاثة أمثال العدد الثالث يزيد عن مثل العدد الأول بمقداره ، فما هي هذه الأعداد؟

(٦١) بركة ماء مستطيلة الشكل مساحتها ٨٠ م^{٢} ومحيطها ٣٦ م، فما بُعداها؟

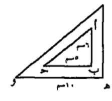
(٦٢) عددان حقيقيان مجموع مربعيهما = ٢٥، والفرق بين مربعيهما = ٧، فما العددان؟ { (٣ ، ٤) أو (- ٣ ، - ٤) }

(٦٣) ثلاثة أمثال عدد مضافاً اليها العدد ٥ تساوي العدد ٢٦ فما العدد؟ {٧}

(٦٤) حل المعادلة ٦ (٢ س - ٣) = ٢ (٧ س + ٤) {- ١٣}

(٦٥) اذا كان المثلثان أ ب جـ ، د هـ و متشابهين

كما في الشكل.



احسب النسبة بين مساحتيهما {١ : ٤}

(٦٦) فكّر بعدد طبيعي واضربه بالعدد ١٣ ثم اطرح منه العدد ١٤١ يُصبح ٢٨ فما العدد؟ {١٣}

(٦٧) يبيع تاجر ملابس القميص الفاخر بمبلغ ٢١ دينار، فإذا علمت أن هذا المبلغ يزيد ٩ دنانير عن ثلاثة أمثال ثمن مادته الخام، احسب هذه التكلفة بالذات.

{٤}

(٦٨) يبيع مزاع انتاج مزرعته من الفواكه البالغ ٣٥ طناً الى سوقين، الأول محلي والثاني خارجي، فإذا كان سعر الطن للسوق المحلي ٥٠٠ دينار وللسوق الخارجي ٦٠٠ دينار، وكان ثمن بيع الانتاج كاملاً ١٩٧٥٠ دينار، كم طناً يبيع السوق؟

(٦٩) أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات:

(١) س^{2} – ١ = صفر {- ١ ، ١}

(٢) س^{2} – ٢س = صفر {٠ ، ٢}

(٣) س^{2} – ٢س + ١ = صفر {١}

(٧٠) حل المعادلة $\sqrt{٥}$ س − ٥ + س = $\sqrt{٥}$ { $\sqrt{٥}$ }

(٧١) حل المعادلات التالية:

(١) ٥ س + ٢ = ٣ س − ٤

(٢) $\frac{س + ٢}{٢} = \frac{س + ٣}{٣}$

(٣) ٤ $س^٢$ − ١ = ٤ − $س^٢$

(٤) (س − ١) (س − ٢) (س − ٣) = صفر

(٧٢) ركّب المعادلة التربيعية التي جذراها { $\frac{١}{٦}$ ، ٦ }

والمعادلة التكعيبية التي جذورها { $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$ }

(٧٣) ما قيمة كل من المتغيرين س ، ص إذا كان

(٧ ، ٣ ص − ١) = (٢ س + ١ ، ٨) { ٣ ، ٣ }

(٧٤) عدد مؤلف من رقمين مجموعهما ٦ واذا عُكس وضع الرقمين زادت قيمة العدد بمقدار ١٨ فما العدد؟ { ٢٤ }

(٧٥) مع كميل ٤٥ ورقة نقدية من فئات الخمسة دنانير والعشرة دنانير فقط، فإذا كان المبلغ جميعه يساوي ٣٠٠ دينار، فكم عدد الأوراق من كل فئة من الفئات معه؟ { ١٥ ، ٣٠ }

(٧٦) من الشكل المجاور ما قيمة المتغيرين س ، ص؟

{ ١٠٠ ، ٢٠٠ }

{ ارشاد: استعن بتشابه المثلثين }

أ
٥٤٠سم
هـ
١٨٠سم
ص
س
ب
د
جـ
٣٠٠سم

(٧٧) ما قيم س ، ص اللتان تجعلان للشكلين المساحة نفسها؟

{ ١ ، ٤ }

(٧٨) الزوج المرتب (- ٥ ، ٨) يحقق أياً من المعادلات الخطية التالية:

س + ص = ٦ ، س = ٣ – ص ، ص = ٤ س + ١ ، ٢ س = ص

(٧٩) مثلث متساوي الساقين، طول محيطه يساوي ٢٢ سم وطول قاعدته تعادل ثلاثة أرباع طول أحد ساقيه. جد أطوال أضلاعه ومساحته أيضاً.

{ ٨ ، ٨ ، ٦ ، ٣ $\sqrt{55}$ }

(٨٠) اكتب كلاً من المعادلات الخطية التالية بالصورة العامة

أس^{٢} + ب س + جـ = صفر:

س – ٣ ص = - ٥ ، ص = - ٥ س + ٧ ، ٣ س = ٤ ، ٥ ص = ٢

(٨١) قبل ١٥ عام من الآن كانت النسبة بين عمري خولة وخلود كنسبة ٣ : ٢ أما الآن فقد أصبحت النسبة بين عمريهما كنسبة ٤ : ٣ فما عمر كل منهما الآن؟ { ٦٠ ، ٤٥ }

(٨٢) صل بخط بين المعادلة التربيعية من القائمة أ بالمجموعة التي تمثل حلها من القائمة ب:

القائمة أ	القائمة ب
س٢ = - ٣	{ ٢ }
س (٣ س - ٩) = صفر	ϕ
(٢ س - ٤)^{٢} = صفر	{ ٠ ، ٣ }
١ – س^{٢} = صفر	{ - ١ ، ٢ }
س٢ + ٤ س + ٤ = صفر	{ - ٢ }
	{ - ١ ، ١ }

(٨٣) حل المعادلات التربيعية التالية، ثم تحقق من صحة الحل:

(١) $(ص - ٣)^٢ - ٨$ = صفر   (٢) $(ص + ٣)^٢ + ٨$ = صفر

(٣) $(ص + ٣)^٢ - ٦$ = صفر   (٤) $(ص - ٣)^٢ - ٤$ = صفر

(٨٤) أوجد مجموعة الحل للمعادلات:

(١) $س^٢ + ١٠ س + ١٣$ = صفر   (٢) $س^٢ + ٢\sqrt{٢}س + ٢$ = صفر

(٨٥) ما العدد الطبيعي الذي إذا أضيف مربعه الى مثليه أصبح الناتج مساوياً للعدد ١٥؟ { ٣ }

(٨٦) معادلة تربيعية مجموع جذريها - ٤ وحاصل ضربهما ٣ اكتب المعادلة التربيعية وما جذراها أيضاً. {$س^٢ - ٤ س + ٣$ = صفر }

(٨٧) حل المعادلة $\frac{٥ س - ٧}{٧ س - ٥} = \frac{٥ س + ٧}{٧ س + ٥}$ { صفر }

(٨٨) لديك ثلاثة مربعات وكذلك هذه المعلومات، والمطلوب منك الإجابة فقط:

المربع الأول محيطه ٤٨ سم فما مساحته؟ {١٤٤ $سم^٢$ }

المربع الثاني مساحته ١٩٦ $سم^٢$ فما محيطه؟ { ٥٦ سم }

المربع الثالث طول قطره ٥٠ سم فما محيطه ومساحته؟

{$١٠٠ \sqrt{٢}$ سم ، ١٢٥٠ $سم^٢$ }

(٨٩) اذا كان عمر وحيد يزيد عن عمر ابنه وليد ٢٦ سنة وكان عمر وحيد ينقص ١١ سنة عن مربع عمر ابنه وليد، فما عمر كل منهما؟

{ ٣٥ ، ٩ }

(٩٠) حل المعادلتين س + ٢ ص = ٣

٢ س + ص = ٣ { (١ ، ١) }

(٩١) اكتب المعادلات الخطية التالية على صورة ص = م س + جـ حيث م ميل المستقيم، جـ مقطعه الصادي (كون المعادلة الخطية تمثل بمستقيم):

(١) ٥ س + ٣ ص = ٤٠

(٢) ٣ س = ٤ ص + س + جـ

(٣) س = - ٧ ص

(٩٣) اكتب المعادلات الخطية التالية بالصورة العامة أ س + ب ص + جـ = صفر:

(١) ص – س = ٧

(٢) ص + $\sqrt[3]{٧}$ س = - ٥

(٣) ص = صفر

(٤) س = - ١

(٥) س = - ص

(٩٤) اكتب مجموعة تحتوي خمسة حلول للمعادلة التالية:

س – ص= ١ على شكل أزواج مرتبة.

(٩٥) اجعل س موضوع القانون في كل من المعادلات التالية:

(١) ٥ س – ٣ ص = ١٥

(٢) س + ٤ ص = ٧

(٣) ٨ س + ص = جـ

(٩٦) كوّن معادلة خطية بمتغيرين تمثل كلاً من العبارات التالية:

(١) عددان حقيقيان مجموعهما ٢٤.

(٢) عددان حقيقيان مجموع أحدهما ومثلي الآخر يساوي ٢٥.

(٣) يحتوي ليس على أوراق نقدية قيمتها ١١٠ دنانير بعضها من فئة العشرين ديناراً والبعض الآخر من فئة الخمسين.

(٩٧) مثّل بيانياً مجموعة الحل لكل من المعادلات الخطية:

(١) س + ٢ ص = ٨   (٢) ٢ س − ص = ٦

(٩٨) حل المعادلتين الخطيتين التاليتين بيانياً ثم أوجد مجموعة الحل:

س + ص = ٧ ، س - ٢ ص = - ٢   { (٤ ، ٣) }

(٩٩) اذا كان الفرق بين عددين حقيقيين يساوي - ٤ ، وكان باقي طرح الثاني من ٣٠ يساوي الأول، فما العددان؟   { ١٣ ، ١٧ }

(١٠٠) زاويتان متكاملتان تزيد الكبرى عن الصغر بمقدار ٣٠° فما مقياس كل منهما؟   { ١٠٥° ، ٧٥° }

(١٠١) أوجد مجموعة الحل للنظام التالي:

ص = ١ - $\frac{١}{٢}$ س ، س - $\frac{١}{٣}$ ص = - ٥

{ (- ٤ ، ٣) }

(١٠٢) مجموع عمري عمرو وعمّار الآن ١٠ سنوات، وبعد أربع سنوات يُصبح عمر عمرو مثلي عمر عمّار، فما عمر كل منهما الآن؟

{ ٨ ، ٢ سنة }

(١٠٣) يُراد تصميم وسيلة تعليمية من قطعة خشبية مستطيلة الشكل محيطها ٢٠٠ سم والفرق بين بعديها ٢٠ سم فما بعداها؟

{٦٠ ، ٤٠ سم}

(١٠٤) اشترى سعدي ٣ أقلام و ٧ دفاتر بمبلغ ٤٤٠ قرشاً واشترت سعاد ٧ أقلام و ٣ دفاتر من الأصناف نفسها بمبلغ ٣٦٠ قرشاً ما ثمن كل من القلم والدفتر؟

{٣٠ ، ٥٠ قرشاً}

(١٠٥) حل المعادلتين الخطيتين:

٥ س + ٣ ص = ١١ ، ٢ س – ٧ ص = ٢٩

{(٤ ، – ٣)}

(١٠٦) عدد طلبة الصف الأول الأساسي في احدى المدارس المختلطة ٥٠ طالباً وطالبة، فإذا كان ثلاثة أمثال عدد الطلاب يزيد عن مثلي عدد الطالبات بخمسين طالباً ، فما عدد الطلاب والطالبات في الصف المذكور؟

{٣٠ ، ٢٠}

(١٠٧) عدد مؤلف من رقمين فيه رقم العشرات يزيد واحداً عن ثلاثة أمثال رقم الآحاد ، وإذا عكس وضع الرقمين يقل العدد بمقدار ٤٥ ، فما العدد؟

{٧٢}

(١٠٨) اذا كانت ص = أ س + ب ، وعندما ص = ٤٠ تكون س = ١٠ وعندما ص = ٢٢٠ تكون س = ٥٠ فما قيمة أ ، ب؟ {٤,٥ ، – ٥}

(١٠٩) المجموعة {(٠ ، ٥) ، (- ١ ، ٦) ، (٧ ، ٠٢)} تُمثل حلاً لأي من المعادلات:

س − ص = ٣ ، س + ص = ٥ ، س = ص + ١

(١١٠) جد نقطة تقاطع المستقيمين $ل_١$: س + ٢ ص = ٨

$ل_٢$: ٢س − ص = ٤

(١١١) حل المعادلة $س^٣$ - ٤ $س^٢$ = صفر ، س ∋ ح { ٠ ، - ٢ ، ٢ }

(١١٢) بسط العبارة الكسرية $\frac{٢ س + ٤}{س^٢ + ٣س + ٢}$ { $\frac{٢}{س + ١}$ }

(١١٣) حل المعادلات التالية:

(١) - ٣ $س^٢$ = ٢١ س

(٢) ٢ $س^٢$ + ٥ س - ٦ = صفر

(١١٤) ركب المعادلة التي مجموع جذريها - ٣ وحاصل ضربهما - ١٠.

(١١٥) أوجد احداثيات نقطة تقاطع المستقيمين ص = ٢ س + ٥

ص = - ٣ س - ٤

{ (- $\frac{٩}{٥}$ ، $\frac{٧}{٥}$) }

(١١٦) حل المعادلة:

$\frac{٢ س - ١}{٥}$ + $\frac{٥ س + ٣}{١٧}$ = ٣ - $\frac{٤ س - ١٨}{١١}$

والمعادلتين: $\frac{س - ١١}{٣}$ + ص = ١٨ ⟵ (١)

٢ س + $\frac{ص - ١٣}{٤}$ = ٢٩ ⟵ (٢)

(١١٧) ذهب هلال الى مكتبة الاستقلال واشترى بنصف ما معه من نقود كتاب وبثلث ما بقي معه دفتر وبخُمس ما بقي معه بعد ذلك قلم وبعد كل هذه المشتريات بقي معه ٤ دنانير فقط، كم ديناراً كان معه قبل أن يبدأ عمليات الشراء تلك؟ { ١٥ }

(١١٨) حل المعادلات التالية:

(١) $\frac{\text{س} - ٧}{\text{س} + ٧} + \frac{١}{٢(\text{س} + ٧)} = \frac{٢\text{س} - ١٥}{٢\text{س} - ٦}$

(٢) $\frac{\text{س} + ٥}{\text{س} + ٧} = \frac{\text{س} + ١٥}{\text{س} + ١٢}$

(٣) النظام $\frac{٣}{\text{س}} + \frac{٢}{\text{ص}} = ٦$ ، $\left(\frac{١}{\text{ص}} - \frac{١}{٢\text{س}}\right) = ٢$

(١١٩) غادر قطار المدينة أ متجهاً نحو المدينة ب بسرعة ٤٠ ميل/ الساعة وفي نفس اللحظة غادر قطار آخر المدينة ب متجهاً نحو المدينة أ بسرعة٤٧ ميل/ الساعة . متى وأين يلتقي القطاران معاً؟ علماً بأن المسافة بين المدينتين ١٧٤ ميل.

(١٢٠) من الشكل المجاور احسب طول العامود أ د

{ $\frac{٦٠}{١٣}$ سم }

(١٢١) حل المعادلات التالية:

(١) $٣\text{س}^٢ - ١٧\text{س} + ١٠ = \text{صفر}$

(٢) $٣\text{س}^٢ + ٥\text{س} - ٢ = \text{صفر}$

(٣) $\frac{١}{٥}(٤\text{س} + ١) - \frac{١}{٣}\left(٦\text{س} - \frac{١}{٥}\right) = \frac{١}{١٥}(٢\text{س} + ٣٩)$

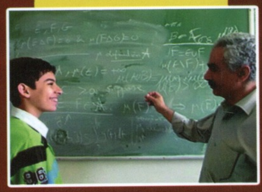
(١٢٢) أوجد مجموعة الحل للنظام:

$٨\text{س} + ٣\text{ص} = ٢$ ، $٥\text{س} + \frac{٥}{٤}\text{ص} = ٥$

(١٢٣) كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها ($\frac{٥}{٧}$ ، $\frac{٧}{٥}$)

{ $٣٥\text{س}^٢ - ٧٤\text{س} + ٣٥ = \text{صفر}$ }

(١) أ . ج مادوكس "مبادئ التحليل الرياضي" ترجمة وليد ديب، منشورات مجمع اللغة العربية الأردني ١٩٨٤ م.
(٢) ايرل و . سوكوفسكي "حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية" جزءان ، ترجمة أحمد سعيدان ورفاقه، ١٩٨١ م.
(٣) سعد حسنين محمد ورفاقه، "المدخل في الرياضيات الحديثة" ، جزءان، دار المعارف بمصر ، ١٩٧١ م.
(٤) سليمان أبو صبحا "الرياضيات للعلوم الاقتصادية والادارية" مكتبة بغداد –عمان ، ١٩٩٤ م.
(٥) شارلزسولومون، "الرياضيات" ترجمة علي بن الأشهر، معهد الاتحاد العربي، بيروت - ١٩٨١ م.
(٦) عادل سودان ورفاقه "الرياضيات المعاصرة" جزءان، مؤسسة الرسالة، بيروت، ١٩٧١ م.
(٧) عايش زيتون "أساسيات الاحصاء الوصفي" ، دار عمار للنشر والتوزيع، عمان، ١٩٨٤ م.
(٨) عبدالرحيم القواسمة وزميله، "دليل الاختبارات في الرياضيات المعاصرة" جزءان، دار الفرقان للنشر والتوزيع – عمان ، ١٩٨٢ م.
(٩) عبدالعزيز هيكل ورفيقه "الاحصاء"، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٨٠ م.
(١٠) عبدالعزيز هيكل ورفيقه "الرياضيات" ، دار النهضة للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٨٠ م.
(١١) عبدالعزيز هيكل "الرياضة المالية" دار النهضة للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٧٨ م.
(١٢) علي عبدالله الدفاع "نوابغ علماء العرب في الرياضيات" دار الاعتصام.
(١٣) فيجودسكي، "المرجع في الرياضيات العالية" ترجمة أنطون منصور، دار جبر للطباعة والنشر، روسيا – موسكو، ١٩٧٥ م.
(١٤) كما يعقوب "الرياضيات الحديثة" جزءان، دار المعارف بمصر، ١٩٧٣م.
(١٥) محمد عادل سودان، "الرياضيات العامة" ، ثلاثة أجزاء، دار العلوم للطباعة والنشر.
(١٦) محمد عاطف خير الدين ورفاقه، "المثالي في الرياضيات المعاصرة" عدة أجزاء.
(١٧) نيل ديفدسون ورفيقه "الجبر المجرد" ترجمة ديب حسين، منشورات مجمع اللغة العربية الأردني، ١٩٨٢ م.
(١٨) نخبة من المؤلفين "الرياضيات المدرسية وفق منهاج التربية والتعليم الأردنية"، ٢٠٠٧ م.
(١٩) وليم جويس ورفيقه "مبادئ المعادلات التفاضلية"، ترجمة أحمد علاونه ورفيقه، مركز الكتب الأردني، ١٩٩٠ م.



الرياضيات الشاملة

الهندسة المستوية - الهندسة التحليلية

التحليل إلى العوامل - المعادلات الجبرية





للنشر والتوزيع

الأردن - عمان

هاتف: 00962 6 5658253 / 00962 6 5658252

فاكس: 00962 6 5658254 ص.ب: 141781

البريد الإلكتروني: darosama@orange.jo

الموقع الإلكتروني: www.darosama.net